Leitfaden
für den
Unterricht
in der
reinen Mathematik
auf
Schulen und Gymnasien
von

Jac. Struve
Rector am Lyceum zu Hannover.

Erste Abtheilung.

Hannover,
im Verlage der Helwingischen Hofbuchhandlung.
1789.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorerinnerung.

Seit einigen Jahren, in welchen ich einen Unterricht in der reinen Mathematik den Jünglingen der ersten Ordnung unsers Lyceums ertheilte, sah ich mich

vergebens nach einem solchen Hand- buche um, welches mit guter Ord- nung, lichtvoller Deutlichkeit, ge- drungener Kürze, befriedigender Reichhaltigkeit, auch noch diese Ei- genschaft vereinigte, daß es nicht die Beweise der Lehrsätze, und die Auf- lösungen der Aufgaben der Länge nach enthielte. Gleichwohl scheint mir außer jenen wünschenswerthen Vollkommenheiten auch das letztere nothwendig zu seyn, wenn der Leh- rer diejenigen Endzwecke, um derent- willen diese Wissenschaft vorzüglich auf Schulen getrieben zu werden ver- dient, glücklich erreichen will; ich meine Schärfung der Aufmerksamkeit, un-

ununterbrochene Anwendung des Nachdenkens auf Eine vorliegende Sache, Uebung im Abstrahiren und Erfinden. Sind nemlich Beweise und Auflösungen schon im Compendium enthalten: so entsteht daraus ein vielfältiger Nachtheil. Die Erwartung des Lehrlings wird nicht stark genug erregt; während des Unterrichts ist nicht recht lebhafte Aufmerksamkeit zu bewürken. Warum? Es steht ja alles im Buche; es kann ja zu Hause einstudirt werden.

Der häusliche Fleiß verliert dabey; der Jüngling denkt, weil alles seiner Meinung nach sich im Com-

pendium befindet, er könne noch zu jeder Zeit das Versäumte wieder einbringen; und nun setzt er die Wiederdurchlesung so lange aus, bis er sie endlich fruchtlos findet. Selbst das Ansehen des Lehrers könnte in etwas leiden; nur zu leicht bildet sich der Anfänger ein, sein Compendium eben so richtig von selbst zu verstehen, und mathematische Lehrsätze eben so gut alleine erläutern und beweisen zu können.

Dagegen läßt meine eigene Erfahrung, welche ich, seitdem die ersten Bogen des gegenwärtigen Leitfadens in unsern Händen waren, schon ge=

gemacht habe, mich hoffen, daß bey der von mir getroffenen Einrichtung obige Nachtheile leichter vermieden, und bey gehöriger Methode der Zweck des mathematischen Unterrichts auf Schulen besser werde erreicht werden. Der Lehrer mag nach hergelesenem, am besten von einem Jünglinge selbst hergelesenem Lehrsatze folgende und ähnliche Fragen an seine Lehrlinge ergehen lassen: Was ward hier behauptet? Wie, unter welchen Bedingungen ward dieses behauptet? Wer kann am ersten ein Erläuterungsbeyspiel für diese Behauptung erfinden? Wer ein anderes? Wer hilft mir jetzt die Bedingungen oder

Voraussetzungen mit allgemeinen Zeichen an die Tafel schreiben? Wer kann das zu beweisende hierauf in eben diesen Zeichen angeben? Wie sollte wohl die Beweisführung angestellt werden müssen? Können Sie es nicht aus dem oder jenem §. vermuthen? Wer beweiset noch einmal zu Hause eben diesen Lehrsatz nach vorausgeschickter Erläuterung in andern Beyspielen in andern allgemeinen Zeichen? Diese und ähnliche Fragen, Aufmunterungen und Fingerzeige, welche bey der gewöhnlichen Einrichtung der Compendien in dieser Wissenschaft wegfallen, sind, denke ich, nicht ohne beträchtlichen Einfluß

auf die Gründlichkeit des Unterrichts, und überhaupt auf die Uebung des Lehrlings im genauen Nachdenken und Schließen. – In den paar Fällen, wo ich gleichwohl eine Beweisführung hinzusetzte, war's auf eine bessere Wendung und größere Deutlichkeit derselben abgesehen; es mag immer Selbsttäuschung seyn, die mich zur Ausführung dieser Beweise verleitete; wenigstens bedaure ich es, daß der 76 §. dadurch so weitläuftig geworden ist, und in einem solchen Mißverhältnisse zu den Uebrigen steht. – Die allgemeine Arithmetik oder Buchstabenrechnung habe ich aus einem doppelten Grunde in die gemei-

ne Arithmetik aufgenommen, und sie bey jeder Rechnungsart eingeschaltet. Einmal diese Lehren gewinnen dadurch ein neues Interesse für den Jüngling, welcher sonst, zufrieden mechanisch addiren, subtrahiren u. s. f. zu können, sich die gründliche Erlernung dieser Operationen nicht angelegen seyn läßt; zweytens diese vorhergehende Uebung in der Buchstabenrechnung ist die beste Vorbereitung zum Verstehen der nachherigen oft nicht leichten Beweisführungen in allgemeinen Zeichen. —

Daß ich einige Lehren in einem größern Umfange vortrug, als gewöhnlich seyn mag in einem Schulcursus, geschah, weil dieser Leitfaden blos für den Unterricht in der obersten Classe einer Vorbereitungsanstalt bestimmt ist. Mit jüngern Zöglingen Mathematik vornehmen, befürchte ich, wird entweder fruchtlose Spielerey, oder hat auch im seltneren Falle die nachtheiligen Folgen, welche der Herr Geheimecanzleysecretair Rehberg in der Berl. Mon. Jan. 89. S. 53 und 54. so richtig angegeben

hat.

hat. Fertigkeit im praktischen Rechnen, welche sie in Stand setze, dem gründlichen Unterrichte demnächst ohne Aufhalt von der Seite zu folgen, genüge diesen!

Die Entfernung vom Druckorte hat einige beträchtliche Fehler veranlaßt, von denen ich folgende von mir bisher bemerkte vorläufig abzuändern ersuche.

S. 2. 3. 4 Zeile 1 statt Eintheilung lies Einleitung.

S. 13 Z. 12 statt a^r und b^r l. a^r und a^r.

S. 27 Z. 9 statt eben das Produkt lies eben den Quotienten.

S. 34 Z. 5 statt 1|105 lies 1|105
 | 5

S. 37 Z. 12 statt ſo lies ß.

S. 73 Z. 11 statt iſt lies ſind.

S. 75 Z. 10 $a^n = R$ lies $a^n = Q$.

S. 76 Z. 6 und 7 statt wahrer unächter wahrer ächter oder unächter.

S. 77 Z. 4 statt $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{1}$ lies $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}$.

S. 97 Z. 2. st. $\frac{n-x-2}{x-1}$ lies $\frac{n-(x-2)}{x-1}$.

ebend. Z. 7 st. $\frac{n-x-1}{x-1}$ lies $\frac{n-(x-1)}{x-1}$.

S. 103 Z. 4 st. $\sqrt{\frac{3}{2}}$ lies $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

eben-

ebendas. statt $\sqrt[3]{\frac{7}{8}}$ lies $\frac{\sqrt[3]{7}}{8}$.

ebend. Z. 10. st. a.b n lies a.b, n

S. 105 vorl. Z. st. $b^n \sqrt{a}$ lies $b^n \sqrt{a}$.

S. 108 Z. 20 st. b b + d lies b, b + d.

S. 109 Z. 13 st. auch lies aus.

S. 113 letzte Z. st. aus lies auch.

S. 117 Z. 15 st. 80 lies 90.

S. 124 Z. 4 st. $\frac{1}{x}$ hat lies $\frac{1}{x}$, hat.

S. 125 Z. 8 st. $\frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^5}$ lies $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5}$.

S. 126 Z. 3 st. $\left(1 - \frac{b}{\cdot}\right)$ lies $\left(1 - \frac{b}{a}\right)$.

S. 127 Z. 1 st. 124 lies 127.

Auch setze ich folgende 6 Berich-tigungen her: S. 5 unterst. Z. muß

hin-

hinter dem Worte, Logarithmen, eingerückt werden: „Combinationen und Permutationen." S. 6 Z. 8 muß heißen: „die gemeine Geometrie, und dann die höhere Arithmetik nebst der höhern Geometrie; S. 36 Z. 2 ist nach den Worten, schon eher, einzurücken: „als hier angenommen ist" und das folgende „schon" wegzustreichen; S. 53 Z. 14 sind die Worte: „nur eine ursprüngliche Primzahl, oder" wegzustreichen; S. 66 ist unten hinter den 66 §. als Anmerkung hinzuzusetzen; „Im

Falle

Falle der Rest es erfordert, kann man gleich mehrere Zifern vom Divisor wegfallen lassen." Endlich ist S. 124 Z. 6 hinter $\frac{1}{x+1}$ hinzuzusetzen: „zur Summe."

Geschrieben zu Hannover den 7ten April 1789.

Leitfaden für den Unterricht in der reinen Mathematik auf Schulen und Gymnasien.

1. Wenn man auch des beträchtlichen Vortheils nicht erwähnen will, welchen die reine Mathematik ihrem jungen Verehrer für seine anderweitigen Studien in den Fächern der Geschichte, der Sprach- und Alter-

thumskunde, und nachher der so genannten Fakultätswissenschaften, unausbleiblich gewähren wird; wenn man auch nicht anführen will, daß mancher Jüngling noch nicht wissen kann, auf welchen Zweig der angewandten und gemischten mathematischen Wissenschafren er dereinst mit gründlichem Eifer sich zu legen Beruf haben werde: so bleibt doch dieß unstreitig ausgemacht, daß die reine Größenlehre, theils durch die abstrakten Gegenstände, welche sie behandelt, theils durch die Methode, wie sie diese behandelt, für denselben die beste Logik, die beste praktische Uebung in den Vorschriften der Verstandeslehre ist.

S. Kästners mathemat. Anfangsgründe. I. 10:20, und Steinbarts gemeinnützige Anleitung des Verstandes zum regelmäßigen Selbstdenken, §. 154. S. 201 ff. der 2ten Aufl. Ueber die Geschichte dieser Wissenschaften vergleiche man Mertens hodogetischen Entwurf einer vollständigen Geschichte der Gelahrsamkeit, 2tes Bändchen. S. 6-72.

2. Größe, Menge, Vielheit, Zahl oder Anzahl, das Ganze, ein Theil, oder Theile, ganze Zahlen, gebrochene Zahlen oder Brüche, sind die in der reinen Mathematik vorkommenden, leicht verständlich erklärten ersten Begriffe.

Rein oder abstrakt heißt sie, in so ferne sie nie*) die Größen und ihre Verhältnisse anders als an und für sich betrachtet, ohne Rücksicht auf eine bestimmte Art der Dinge, an welchen sich diese Größen bemerken und schätzen lassen. Ihr steht die angewandte oder gemischte, oder vielleicht besser, die angewandte, und die gemischte entgegen. Die Hauptzweige der angewandten sind: I. die mechanischen Wissenschaften, welche 1) die Statik, 2) die Dynamik, 3) die Hydrostatik, 4) die Aerometrie, 5) die Hydraulik, und 6) die Hydrodynamik unter sich begreifen. II. Die optischen Wissen-

*) Man mögte denn etwa das Rechnen in benannten Zahlen, und die praktischen oder gemischten Aufgaben, welche man nicht selten zu desto größerer Deutlichkeit beybringt, ausnehmen wollen.

schaften, welche man gewöhnlich A. in die Optik, B. Katoptrik, C. Dioptrik, und D. in die Perspektiv eintheilet. Endlich III. die astronomischen Wissenschaften, welche a) die sphärische, b) die theorische, c) die physische Astronomie, d) die mathematische Geographie, e) die Hydrographie, f) die Gnomonik, und g) die Chronologie ausmachen. Die gemischte Mathematik enthält, wenn man sie von der angewandten absondert: aa) die Feldmeßkunst *), bb) die Markscheidekunst, cc) die bürgerliche Baukunst, dd) die Wasserbaukunst, ee) die Schiffsbaukunst, ff) die Kriegsbaukunst, gg) die Artillerie oder Geschützkunst, und hh) die Taktik.

S.

*) Die Feldmeßkunst, welche von mehrern nicht ohne Grund unter den Wissenschaften der reinen Mathematik weggestrichen wird, könnte man wol unter diese gemischten setzen; Herr Lorenz hat dieselbe auch in seinen Elementen der Mathematik nebst den letztern, unter dem sonst, denke ich, nicht eben gewöhnlichen Titel, technische Mathematik, abgehandelt.

S. außer Kästners Anfangsgründen, und Karstens Lehrbegriffe der gesammten Mathematik, nebst Mertens hodogetischem Entwurfe, vorzüglich Büsch Encyklopädie der histor. philos. und mathem. Wissenschaften.

3. Eintheilung. Die reine Größenlehre zerfällt in 2 Wissenschaften, in die Arithmetik oder Rechenkunst, und in die Geometrie, oder Größenlehre vom Raum und seinen Gränzen. Beyde kann man in die gemeine und höhere eintheilen. Die gemeine Arithmetik faßt unter sich 1) den Abschnitt von den 4 Rechnungsarten in ganzen Zahlen, in entgegengesetzten Größen, in Buchstabengrößen, in gebrochenen Zahlen, nebst der Lehre von einfachen und zusammen gesetzten Zahlen. 2) Den Abschnitt von den Potenzen nebst der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel. 3) Den Abschnitt von den Verhältnissen und Proportionen, und endlich 4) den Abschnitt von den arithmetischen und geometrischen Reihen nebst der Lehre von den Logarithmen. Die hö-

here Arithmetik hat A. die Algebra, B. die analytische Geometrie, und C. die höhere Analysis zum Gegenstande. In der gemeinen Geometrie kömmt a. die reine, und b. die gemischte Geometrie vor; in der höhern aa. die ebene, und bb. die sphärische Trigonometrie.

Wir lassen auf die gemeine Arithmetik erst die ganze Geometrie, und dann die höhere Arithmetik folgen.

Die gemeine Arithmetik.

4. Erklärung. Die Arithmetik ist die Wissenschaft die Verhältnisse der Zahlen und Zahlzeichen nach richtigen Grundsätzen und Beweisen zu beurtheilen, und neue Verhältnisse herauszubringen; oder die Wissenschaft durch bekannte Zahlen und Zahlzeichen verlangte unbekannte zu finden.

Unter Zahlzeichen verstehen wir hier die nicht durch Zifern, sondern durch Buchstaben ausgedrückten Größen.

Numeration.

5. Unsere Zahlen oder Zifern, unsere Decimalordnung und dekadische Rechnungsart, zählen oder numeriren, Zahlen oder Zifern aussprechen und schreiben, sind theils einem jeden bekannte Dinge, theils leicht aufgelösete Aufgaben.

Man erkläre hier nur den Begriff der Homogenität oder Gleichnamigkeit sorgfältig; auch mache man dem Jünglinge die verschiedenen Zahlordnungen nebst den Zifern, womit sie bezeichnet werden, recht deutlich.

6. Erklärungen. Abstrakte oder unbenannte Zahlen sind Zahlen von gänzlich unbestimmter Gleichnamigkeit; concrete oder benannte sind Zahlen von bestimmter Gleichnamigkeit; entgegengesetzte Größen, auch positive oder negative, oder bejahende und verneinende Größen genannt, sind die Größen solcher Dinge, deren Begriffe sich einander gerade entgegen stehen, und sich einander aufheben; Buchstabengrößen, oder algebraische Größen sind solche, deren Werth nicht in Zahlen, son-

dern in Buchstaben ausgedrückt wird; Coefficienten sind diejenigen in Zahlen ausgedrückten Größen, welche als Faktoren oder Multiplicatoren bey den Buchstabengrößen stehen.

Bey den Entgegengesetzten und Buchstabengrößen braucht man die Zeichen + und —.

7. Allgemeine Grundsätze. 1. Jede Größe ist sich selbst gleich. 2. Das Ganze ist seinen Theilen gleich. 3. Ein oder einige Theile sind kleiner als das Ganze. 4. Was größer ist als eine von 2 gleichen Größen, ist auch größer als die andere; eben so was kleiner ist als eine von 2 gleichen Größen, das ist auch kleiner als die andere. 5. Was größer ist als die größere von 2 ungleichen Größen, das ist auch größer als die kleinere; und was kleiner ist als die kleinere von 2 ungleichen Größen, das ist auch kleiner als die größere. 6. Wenn zwey oder mehrere Größen Einer und eben derselben dritten gleich sind, so sind sie einander selbst gleich.

Das

Das Zeichen der Gleichheit ist $=$; das der Ungleichheit ein Winkel $>$ oder $<$, so daß die Oefnung dem Größeren zugekehrt wird.

Addition in ganzen Zahlen, entgegengesetzten und Buchstabengrößen.

8. Erklärung. Addiren heißt 2 oder mehrere gleichnamigte Zahlengrößen, oder Buchstabengrößen zusammenzählen; oder: 2 oder mehrere bald in Zahlen, bald in Buchstaben ausgedrückte Größen als Theile ansehen, und zu Einem Ganzen vereinigen.

Das Zeichen der Addition ist $+$. Die zu addirenden Größen heißen die Addenda, auch die Additionsposten; die durch die Addition gefundene Größe heißt die Summe, das Aggregat, auch wohl das Facit. Gewöhnlich nimmt man ungleiche Posten, weil für die Addition völlig gleicher Posten die Multiplikation erfunden ist.

9. Aufgabe. Addire 2 oder mehrere in unbenannten Zahlen ausgedrückte Posten.

Man mache sich folgende Vortheile geläufig: 1) gleiche Zifern in einer und eben derselben Ordnung gleich durch Multiplikation zu addiren; 2) die Zifern vorläufig auszuheben, welche zusammen 10 ausmachen; 3) beym Addiren zweyer Posten im Kopfe erschöpfe das kleinere Addendum durch eine so öftere Subtraktion der Zahl 10 von demselben, und Hinzufügung dieser 10 zu dem größern Addendo, bis die leicht hinzu addirten Einer nur noch übrig sind. — Bey mehrern, zumal bey sehr vielen, zusammen addirten Posten ist eine Addition in verschiedener Folge der Posten eine kürzere und auch zuverlässigere Probe, als die gewöhnliche in der Subtraktion der Posten bestehende.

10. Aufgabe. Addire 2 oder mehrere in benannten Zahlen ausgedrückte Posten.

Man

Man muß sich üben, benannte Zahlen unter oder auf eine andere Benennung, oder andere Namen zu bringen, und zwar hier benannte Zahlen von kleinerer Benennung auf Zahlen von größerem Namen.

11. Aufg. Addire 2 oder mehrere in entgegengesetzten Größen ausgedrückte Posten.

Man erklärt hier, warum Plusgrößen zu Plusgrößen, Plus; Minusgrößen zu Minusgrößen, Minus; ferner, warum, und wie Plus zu Minus, oder Minus zu Plus, bald Plus, bald Minus geben. Diese entgegengesetzten Größen kommen am häufigsten hinter Buchstabengrößen in einzelnen, unter einander geordneten Posten vor, und da findet ein doppeltes Verfahren statt. Z. B. Wenn + 7 — 8 — 4 + 11 — 3 und + 9 als solche Posten unter einander stehen: so kann man entweder rechnen, + 7 und — 8 giebt — 1, dazu — 4 giebt — 5, hiezu + 11 ist

+ 6,

+ 6, dazu − 3 giebt + 3, hiezu endlich + 9 giebt das ganze Aggregat + 12; oder man rechnet: + 7, und + 11, und + 9 geben + 27; − 8, und − 4, und − 3 machen − 15; nun machen + 27 und − 15 die Summe von + 12 aus. Seltener hat man Reihen von entgegengesetzten Größen zu addiren; diese pflegt man gewöhnlich zu reduciren, wie man es nennt. Z. B. Wenn unter der Reihe 7 − 8 + 3

die Reihen − 6 + 5 − 2

und + 3 − 4 − 7 + 15

stehen: so kann man zwar die einzelnen unter einander stehenden Posten auf obige Weise addiren:

4 − 7 − 6 + 15;

welches = 6 ist; gewöhnlich aber reducirt man die Posten, und sagt der erste macht

+ 2,

+ 2, der zweyte − 3, der dritte + 7, und diese 3 Reduktionsposten machen zusammen 6 aus.

12. Aufgabe. Addire 2 oder mehrere in Buchstabengrößen ausgedrückte Posten.

Gleichnamigkeit ist hier alsdenn, wenn die verschiedenen Posten, oder Glieder dieser Posten, einerley einfache (a und a, oder b und b u. s. w.) oder zusammengesetzte Buchstaben (aa oder a^2 und aa oder a^2, ab und ab, und ganz allgemein a^r und b^r) haben. Ist diese Gleichnamigkeit nicht vorhanden: so kann man nicht eigentlich addiren, sondern nur zusammensetzen, und gleichsam an einander reihen. — Man nehme erst die einzelne Buchstaben, oder einzelne Glieder in Buchstabengrößen, erst homogen, dann heterogen, erst ohne Coefficienten, dann mit denselben, hierauf längere nach gewissen Regeln zu ordnende Posten.

13. Grundsätze 1. Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches. 2. Ungleiches zu Gleichem, oder Gleiches zu Ungleichem, giebt auf eben die Art Ungleiches. 3. Ungleiches zu Ungleichem so addirt, daß man Größeres zu Größerem und Kleineres zu Kleinerem hinzufügt, giebt auf eben die Art Ungleiches.

Subtraktion in ganzen Zahlen, entgegengesetzten und Buchstabengrößen.

14. Erklär. Subtrahiren heißt die eine gegebene Größe, wovon man subtrahiren soll, als ein Ganzes, und die andere gegebene Größe, welche von jener zu subtrahiren ist, als einen bekannten Theil dieses Ganzen ansehen, und nun die Zahl oder Größe des zweyten unbekannten Theils suchen. Kürzer: zu einem gegebenen Ganzen, und Einem bekannten Theil desselben den zweyten unbekannten Theil suchen.

Die Wörter, Minuend, Subtrahend, Rest oder Differenz oder Complement, und das

Zei-

Zeichen — sind leicht erklärt. Die im §. gegebene Erklärung ist allgemeiner anwendbar als die gewöhnliche: untersuchen, um wie viel die eine der gegebenen Zahlen größer sey als die andere. Jetzt ist auch der häufig vorkommende Fall mit eingeschlossen, wenn der Minuend nicht so viele Plus oder Minusgrößen enthält, als der Subtrahend.

15. Aufg. Subtrahire in unbenannten Zahlen.

Man unterscheide die Fälle: 1. wenn der Minuend in allen Zahlordnungen größer, und 2. wenn er in einer, oder in einigen, oder gar in allen Ordnungen, die höchste ausgenommen, keiner ist, als der Subtrahend; ferner, 3. wenn er einzelne, und 4. wenn er mehrere auf einander folgende Nullen hat. Der Fall, daß der Minuend in allen Zahlordnungen kleinere Zifern hat, als der Subtrahend, gehört in den 17. §.

— Die

— Die Probe jeder Art der Subtraktion ist, entweder den Rest und den Subtrahend zu addiren, oder auch den Rest von dem Minuend zu subtrahiren.

16. Aufgabe. Subtrahire in benannten Zahlen.

Vergleiche §. 10; hier muß man oft Zahlen von größerem Namen auf Zahlen von kleinerer Benennung bringen.

17. Aufgabe. Subtrahire entgegengesetzte Größen von einander.

Hier unterscheidet man die 4 Fälle: 1. wenn bey gleichen Plus oder Minuszeichen der Minuend größer ist, als der Subtrahend; 2. wenn bey gleichen Zeichen letzterer größer ist, als der erstere; 3. wenn der Minuend das Plus, und der Subtrahend das Minus; endlich 4. wenn jener das Minus, und dieser das Pluszeichen hat. Bey Reihen entgegengesetzter Größen kann man auch nach §. 11. reduciren. Die mechanische

Regel:

Regel: statt den Subtrahenden zu subtrahiren, addire ihn mit entgegengesetzten Zeichen, hat in dem Wesen dieser Größen ihren Grund.

18. Aufg. Subtrahire Buchstabengrößen von einander.

Man vergleiche über Gleichnamigkeit, und die verschiedenen Fälle den 12ten §, und bemerke, daß da, wo entweder einem Gliede des Minuend kein homogenes im Subtrahend, oder einem im Subtrahend kein gleichnamiges im Minuend entspricht, in dem leeren Platze eine Null in Gedanken anzunehmen sey.

19. Grunds. 1. Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches. 2. Gleiches von Ungleichem, giebt auf eben die Art, Ungleiches. 3. Ungleiches von Gleichem, giebt auf umgekehrte Art Ungleiches. 4. Ungleiches von Ungleichem so subtrahirt, daß man das Kleinere vom Größeren, und das Größere vom Kleinern abzieht

 giebt

giebt auf eben die Art Ungleiches, als es die Minuenden waren.

Multiplikation in ganzen Zahlen, entgegengesetzten und Buchstabengrößen.

20. Erklär. Multipliciren heißt: eine Größe sich so oft als Additionsposten denken, und addiren, als eine andre anzeigt; oder das so vielfache einer Größe suchen, als eine andere die Einheit enthält.

Zusatz 1. Man merkt sich hier die Kunstwörter Multiplikand, Multiplikator, Faktoren oder Efficienten, Produkt oder Faktum, und das Zeichen der Multiplikation.

Zusatz 2. Wenigstens 2 Faktoren sind also zum Multipliciren nothwendig. Mit mehrern, z. E. 3, oder 4, oder 10, oder unbestimmt mit x Faktoren zu multipliciren, heißt: das Produkt von 2 Faktoren noch so oft zu berechnen, als der 3te Faktor anzeigt, oder dieses von 3 Faktoren noch so oft, als der 4te, oder das von 9 Faktoren noch so oft, als der 10te, oder

end-

endlich ganz allgemein, das Produkt von x — 1 Faktoren noch so oft berechnen, als der xte Faktor anzeigt.

21. Grundsätze. 1. Der Multiplikand ist eben so oft im Produkt enthalten, als die Einheit im Multiplikator. 2. Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches. Wenn man also auch den Multiplikand, oder den Multiplikator, oder beyde in beliebige Theile theilet: so geben sie, wenn sie so in und mit allen ihren Theilen multiplicirt werden, eben das Produkt, welches ihre ungetheilte Multiplikation hervorbringt. Z. B. Weil $9 = 6 + 3$, und $7 = 5 + 2$: so ist $(6 + 3) . 7$, oder $9 . (5 + 2)$, oder $(6 + 3) . (5 + 2)$ eben so richtig 63, als $9 . 7$ es ist. 3. Gleiches mit Ungleichem, oder Ungleiches mit Gleichem giebt auf eben die Art Ungleiches. 4. Ungleiches mit Ungleichem so multiplicirt, daß man das Größere mit dem Größeren, und das Kleinere mit dem Kleineren multiplicirt, giebt auf eben die Art Ungleiches.

ches. 5. Ein Produkt mit noch einem Faktor multipliciren, oder diesen mit unter die Faktoren jenes Produkts setzen, oder auch irgend einen der Faktoren jenes Produkts mit demselben multipliciren, giebt einerley neues Produkt. Z. E. 32 ist doch Produkt von 8 . 4; also 32 . 3 = 3 . 8 . 4 = 8 . 3 . 4 = 8 . 4 . 3 = 24 . 4 = 8 . 12.

22. Lehrsatz. Zwey oder mehrere Faktoren geben, in was für Ordnung man sie auch mit einander multiplicirt, jedesmal ein und dasselbe Produkt.

Von 2 Faktoren ist dies leicht erwiesen; daß aber einige von dieser Eigenschaft zweyer Faktoren gleich auf eben dieselbe bey mehrern schliessen, mögte manchem nicht völlig Genüge thun. Man erweiset aber ja leicht aus dem 5ten und 2ten Grundsatze des 21 §, daß z. B. cdba = abcd seyn müsse. Nemlich cdba heißt einmal das Produkt cd noch mit b multipliciren;

diesen

diesen Faktor b kann ich nach §. 21. 5. unter die Faktoren setzen, wohin ich will; so entsteht cdb = bdc. Zweytens heißt cdba soviel, als dieses Produkt cdb noch mit a multipliciren; thut man dieses und erhöhet nach §. 21. 2 und 5. cdb = bdc mit a: so erhält man cdba = abdc.

Zusatz 1. Auch der Multiplikator liegt so oft im Produkte, als die Einheit im Multiplikand.

Zusatz 2. Von mehrern Faktoren liegt jeder so oft in dem Produkte aller, als sich im Produkte der übrigen die Einheit befindet.

23. Aufg. Es wird verlangt, 2 oder mehrere, zumal zusammengesetzte und große Faktoren in unbenannten Zahlen mit einander zu multipliciren.

Nachdem hier die Entstehung des Einmaleins erläutert ist, zeigt man recht deutlich, in welche Ordnung eine Zahl von dieser oder jener Ordnung, durch eine andere

 von

von dieser oder jener Ordnung multiplicirt, gehöre, und warum sie in dieselbe gehöre. Ferner macht man auf die verschiedenen Vortheile, welche man sich hier verschaffen kann, aufmerksam. Wer wird nicht lieber, statt einen großen Multiplikand mit 99992 zu multipliciren, von dessen Hunderttausendfachen sein Achtfaches abziehen? Welcher fertige Rechner wird nicht den Multiplikator 39375 gleich als $= 40000 - (\frac{1}{64} . 40000)$ ansehen, und bey einem großen Multiplikand ihn lieber so gebrauchen? — Die Probe der Multiplikation wird angestellt, indem man das Produkt mit Einem der Faktoren wieder dividirt.

24. Aufg. Multiplicire in benannten Zahlen.

25. Aufg. Multiplicire in entgegengesetzten Größen.

Regel: Gleiche Zeichen in den beyden Faktoren geben Plus, ungleiche Minus.

26. Aufg. In Buchstabengrößen zu multipliciren.

Fälle: 1) einzelne Buchstabengrößen durch unbenannte Zahlen; 2) einzelne Buchstabengrößen mit einzelnen Buchstabengrößen; 3) Reihen aus mehrern Gliedern. Dieß alles mit und ohne Coefficienten. — Oft deutet man die Multiplikation nur an; z. E. man sagt: $2a + 3b - 4c + 5$ mit $3x - 5y$ multiplicirt, giebt zum Produkt $(2a + 3b - 4c + 5) . (3x - 5y)$ — Statt der Größe $4abc + 3ad + 2a$ schreibt man auch $(4bc + 3d + 2) . a$.

Division in ganzen Zahlen, entgegengesetzten und Buchstabengrößen.

27. Erklär. Irgend eine Größe a durch irgend eine Größe b dividiren, heißt die unbekannte Größe c finden, welche einmal, wenn a würklich größer ist als b, anzeige, wie oft b

in a enthalten ist, welche also in diesem Falle uns nicht nur belehre, der wie vielste Theil b von a ist, sondern auch, weil, wenn b in a, c mal enthalten ist, auch c in a, b mal enthalten seyn muß, wie groß der Theil c seyn könne, um b mal in a enthalten zu seyn; welche c zweytens, wenn a kleiner ist als b, b also nicht in a enthalten seyn kann, nur anzeige, was für Theile, und wie viele solcher Theile der Einheit b mal in a enthalten seyn können.

Beyspiel: Wenn 72 durch 8 dividirt werden soll, so heißt dieß, siehe 72 als ein Ganzes an, und untersuche entweder, der wie vielste Theil 8 von diesem Ganzen 72 ist, oder auch, wie groß der Theil werde, der 8 mal in dem Ganzen, nemlich 72, enthalten seyn soll; d. i. zeige, daß 8 ein Neuntel von 72 sey, und daß ein Achttheil von 72 die Größe 9 habe. Hingegen, wenn z. B. 3 durch 8 dividirt werden soll: so kann dieß nicht heißen, zeige, wie oft 8 in 3 liege, oder der wie vielste

 Theil

Theil 8 von 3 sey, sondern nur, wie groß ein Achttheil der Zahl 3 werde, das ist, welche und wie viele Theile der Einheit sind es, welche 8 mal in 3 enthalten sind. Hier erklärt am besten den Ursprung der Brüche, und ihre Uebereinstimmung mit ganzen Zahlen, wenn diese als Dividend und Divisor gedacht und geschrieben werden.

Zusatz 1. a heißt der Dividend, oder das Dividendum; b der Divisor; c der Quotient. Das Zeichen der Division sind zwey Punkte über einander (:) zwischen dem Dividendo und dem Divisor, z. E. a : b, oder ein Strich zwischen dem Dividendo und dem darunter gesetzten Divisor, z. E. $\frac{a}{b}$.

Zusatz 2. Die Division ist also in so ferne das Gegentheil der Multiplikation, daß bey jener das Produkt unter dem Namen Dividend schon bekannt ist, welches man bey dieser erst sucht, und daß hingegen bey der Multiplikation

beyde Faktoren schon bekannt sind, von welchen in der Division nur der Eine es ist unter dem Namen Divisor, der Andere aber, hier Quotient genannt, erst gesucht wird, daß endlich, wenn die Multiplikation eigentlich eine Addition gleicher Größen war, die Division in dem einen Falle eine wiederholte Subtraktion eines stets gleich großen Subtrahenden ist.

28. Grundsätze. 1. Jede Größe liegt einmal in sich selbst. 2. Die Einheit liegt in dem Dividendo so oft, als der Dividend anzeigt, d. i. der Quotient wird wieder so groß, als der Dividend war; man nennt dieß, die Einheit dividirt nicht. 3. Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches; also eine Größe in beliebige Theile getheilt, und alle ihre Theile durch den Divisor dividirt, giebt eben den Quotienten, als wenn die ganze Größe auf einmal durch eben den Divisor getheilt wird. Eben so ein Produkt theilen, oder einen von den Faktoren desselben theilen, giebt einerley Quotient. 72:2 ist =

36, und (8.9):2 = 4.9 ist auch 36. Nicht minder den Divisor in seine Faktoren auflösen, und mit einem dieser Faktoren erst das ganze Dividendum dividiren, dann den erhaltenen Quotienten mit dem zweyten Faktor theilen, den neuen Quotienten mit dem 3ten u. s. w. giebt, nachdem man alle Faktoren so als Divisoren gebraucht hat, eben das Produkt, als wenn das Dividendum auf einmal mit dem ganzen Divisor getheilt wird. Z. B. Wenn das Dividendum 4416 wäre und der Divisor 192: so besteht doch 192 aus den Faktoren 2.3.4.8. Daher 4416:2 = 2208; 2208:3 = 736; 736:4 = 184; 184:8 = 23 = 4416: 192. 4. Ungleiches durch Gleiches dividirt, giebt auf eben die Art Ungleiches. 5. Gleiches durch Ungleiches giebt auf umgekehrte Art Ungleiches. 6. Ungleiches durch Ungleiches so dividirt, daß das Kleinere durch das Größere, und das Größere durch das Kleinere dividirt wird, giebt auf eben die Art Ungleiches, als es die Dividenden waren. 7. Der Divisor liegt so oft im Dividend, als die

Einheit im Quotienten. Multiplicire ich also den Divisor mit dem Quotienten: so erlange ich das Dividendum wieder. Dieß ist die gewöhnliche Probe der Division. 8. Der Quotient liegt so oft im Dividendo, als die Einheit im Divisor. Wäre mir also der Divisor unbekannt, so giebt ihn die Division des Dividendi durch den Quotienten. Auch dieß kann zur Probe der Division dienen, so wie man beydes zur Probe der Multiplikation anwendet, s. §. 23. 9. Das Dividendum mit einer Zahl multipliciren, giebt bey unverändertem Divisor einen eben so vielfach erhöheten Quotienten. 10. Den Divisor mit einer Zahl multipliciren, giebt bey unverändertem Dividendo einen eben so viel mal kleinern Quotienten. 11. Das Dividendum und den Divisor, beyde mit Einer und eben derselben Zahl multipliciren, ändert den Quotienten nicht. 12. Das Dividendum mit einer Zahl dividiren, giebt bey unverändertem Divisor einen um so viel mal kleinern Quotienten. 13. Den Divisor mit einer Zahl dividiren, giebt bey unverändertem Dividendo

dendo einen eben so vielfach erhöheten Quotienten. Endlich 14. Dividend und Divisor, beyde mit Einer Zahl dividirt, ändert den Quotienten nicht.

29. Aufgabe. Jede gegebene unbenannte Zahl mit einer andern zu dividiren.

Man nimmt an, daß hier das Dividendum größer ist, als der Divisor; der umgekehrte Fall gehört in die nachfolgende Lehre von den Brüchen, und tritt hier nur bey so genannten Resten ein. Es ist wohl gethan, folgende Fälle zu unterscheiden: 1. wenn der Divisor ein Einer ist, und der Dividend nicht über die Produkte der Faktoren aus eben dieser niedrigsten Zahlordnung geht, z. E. 14:2 oder 72:8. 2. Wenn der Divisor zwar ein Einer ist, das Dividendum aber über die Produkte des Einmaleins hinaus geht z. E. 86:2 oder 152:8. 3. Wenn beydes Divisor und Dividend zugleich aus mehrern Zahlordnungen

gen bestehen. — Vortheile sind hier unter andern folgende: 1. Daß man, wenn beydes Dividend und Divisor am Ende Nullen haben, diese in gleicher Anzahl gegen einander wegstreiche (40800 : 3400 ist = 408 : 34); oder wenn das Dividendum gar keine, oder doch nicht so viele Nullen, als der Divisor, am Ende hat, alsdenn so viele Zifern gleich am Ende des ersteren als Rest abschneide, als der Divisor Nullen hat: 40850 : 3400 ist = 408 : 34 nebst dem mit 3400 als Nenner zum Bruche zu schreibenden Reste 50. 2. Daß man Dividend und Divisor oft mit einerley Größe dividiren und verkleinern kann. 3. Daß man, wenn der Divisor ein Produkt ist, auf die §. 28. 3 angewiesene Art verfahre; 4. daß man, wenn der Divisor ein Maaß der Zahl 100 oder 1000 oder jeder höhern Potenz der Zahl 10 ist, mit dieser letztern erst theile, und dann bedenke, daß der Quotient so vielfach

genommen werden muß, als jenes Maaß in der Potenz der Zahl 10 liegt, womit man vorher dividirte. Wer wollte nicht, statt 689753400 durch 25 auf gewöhnliche Art zu dividiren, lieber 6897534 mit 4 multipliciren? Ja, im Falle dieselbe Zahl mit 75 zu dividiren ist, lieber zu 6897534, $\frac{1}{3}$ dieser letzten Zahl addiren? Freylich kann man in beyden Fällen auch mit Faktoren dividiren, nemlich mit 5.5 und 5.5.3, wo der Umstand, daß 5 = $\frac{1}{2}$.10 ist, noch fast größere Leichtigkeit gewähret. 5. Wenn der Divisor nicht um 9 kleiner ist, als 100, oder 1000, oder eine sonstige höhere Potenz der Zahl 10: so mache man sich folgendes Verfahren geläufig: Wenn z. B. 489699, und 36000, jedes mit 96, und 221845 mit 995 zu dividiren ist: so dividire die Dividenden mit der nächst höheren Potenz der Zahl 10, also in den beyden ersten Fällen mit 100, und in dem letztern mit 1000, und ziehe zwischen dem Quotienten und Reste

einen

einen senkrechten Strich. Den Quotienten linker Hand des Strichs multiplicire hierauf mit der Differenz des würklichen Divisors von der genommenen nächst höheren Potenz der Zahl 10, und schreibe das Produkt so, daß dessen niedrigste Zifer unter der niedrigsten Zifer des Restes stehe. Dieses Produktes Zifern linker Hand des Striches multiplicire wieder mit der Differenz, schreibe das neue Produkt auch wieder auf die bemerkte Art, und fahre mit dieser Operation so lange fort, als die Produkte Zahlen linker Hand des Striches geben. Hierauf addire man die Rest- und Quotientenkolumnen: so giebt die erstere richtig den Rest, und die letztere richtig den Quotienten an. Nur in Ansehung des Restes eräugnen sich nicht selten 2 Fälle, einmal, daß wie in 36000 : 96 sich ein dem Divisor gleicher Rest zeigt, welcher dadurch, daß man dem Quotienten Eins hinzufügt, getilgt werden muß; zweytens,

daß

daß dieser Rest als das Aggregat mehrere Posten in die nächste Ordnung des Quotienten überträgt, wie in 489699 : 96; alsdenn muß zu der als Rest stehen bleibenden Größe die Differenz noch so oft addirt werden, als jenes Aggregat Einheiten in die niedrigste Ordnung des Quotienten übertrug, und wenn hiedurch, wie im Beyspiele 489699 : 96 der Rest wieder größer, oder doch eben so groß als der Divisor wird: so ist der Divisor einmal von demselben zu subtrahiren und dem Quotienten Eins zuzuschreiben. Die ganze Operation sieht so aus:

durch 96

Q.	R.
4896	99
195	84
7	80
	28
5100	91
Addire 2 . 4	= 8
Quotient	Rest
5100	99 giebt
Quot.	Rest
5101	3

durch 96

Q.	R.
360	00
14	40
	56
Quot.	Rest
374	96 giebt
Quot.	Rest
375	0

durch 995

Q.	R.
221	845
1	105
Quot.	Rest.
222	955

Dieß Verfahren gewährt in großen Zahlen doch keine geringe Erleichterung, z. B. wenn 87654239647510 durch 99995 zu dividiren wäre. Der sel. Schmid hat in seiner Rechenkunst dasselbe auch schon empfohlen, doch ohne die verschiedenen Fälle, welche hier in Ansehung des Restes entstehen können, auszuzeichnen, und ohne Entwickelung des nicht gleich auf den ersten Blick zu entdeckenden Grundes. Mir sey ein Versuch, den letztern aus einander zu setzen, erlaubt. M heiße der Dividend; der

Divisor $10^x - d$, wo d, wie oben gesagt, höchstens 9 seyn darf; 10^x ist nun also die nächst höhere Potenz der Zahl 10; $\frac{M}{10^x}$ gebe den Quotienten n und lasse den Rest a. So ist:

$$M = n.\ 10^x + a;\ \text{also}$$
$$M = n.\ (10^x - d) + a + nd;$$
$$nd\ \text{sey} = p.\ 10^x + b:\ \text{so ist}$$
$$nd = p.(10^x - d) + b + pd;\ \text{also}$$
$$M = (n + p).\ (10^x - d) + a + b + pd$$
$$pd\ \text{sey wiederum} = q.\ 10^x + c;\ \text{so ist}$$
$$pd = q.(10^x - d) + c + qd;\ \text{also}$$
$$M = (n + p + q).\ (10^x - d) + a + b + c + qd.$$

Man muß so fortfahren, bis in

$$M = (n + p + q \ldots + z).(10^x - d) + a + b + c \ldots + z + zd$$

$zd < 10^x$ wird; ein Fall, der sich sehr bald eräugnen muß, und oft

 schon

schon eher, noch öfterer in qd, oder doch rd schon eintritt. Selbst wenn M eine Billion ist, 10^x seinen kleinsten Werth 100, und d seinen grösten 9 hat, können zwischen nd und zd, oder n und z, nur 8 Glieder statt finden; Zahlen, welche, wie $\frac{nd}{10^x}$ (= p), $\frac{nd^2}{10^{2x}}$ (= q), $\frac{nd^3}{10^{3x}}$ (= r) abnehmen, müssen bald kleiner als 10^x werden.

Auf diese Formel $M = n . 10^x + a = (n + p + q .... + z) . (10^x - d) + a + b + c .... + z + zd$ ist das vortheilhafte Verfahren gegründet. In der Addition giebt $a + b + c .... + z + zd < 10^x - d$ den Rest genau an; wenn $a + b + c .... + z + zd > 10^x - d$ aber $< 10^x$ ist: so giebt $(a + b + c .... + z + zd) - (10^x - d)$ den genauen Rest, und dem Quotienten wächst Eins zu; endl. wenn $a + b + c .... + z + zd$ nicht

nur

nur $> 10^x - d$, sondern auch $> 10^x$, also $= \alpha . 10^x + \beta$ ist: so ist, weil durch die Addition nach unserer dekadischen Rechnungsart $\alpha . 10^x$ mit in den Quotienten übergieng, in welchen nur $\alpha . (10^x - d)$ übergehen durfte, zwar nicht zuviel in das Aggregat des Quotienten übergetragen; aber da dadurch vom Aggregate der Reste $\alpha . 10^x + \beta$, statt $\alpha . (10^x - d)$ abzuziehen, $\alpha . 10^x$ abgezogen ist: so ist αd zu zu viel abgezogen, und also zu dem Reste so wieder hinzu zu addiren; $\beta + \alpha d$ gewöhnlich $< 10^x - d$ giebt nun den richtigen Rest; im seltnerem Falle $\beta + \alpha d$ zwar nothwendig $< 10^x$, aber doch $> 10^x - d$, also $= 10^x - d + \gamma$ wächst dem Quotienten durch dieß $10^x - d$ noch eins zu, und γ ist der genaue Rest.

30. Aufg. Die Division in benannten Zahlen zu verrichten.

Bald ist nur das Dividendum eine benannte Zahl, bald zugleich auch der Divisor.

31. Aufgabe. In entgegengesetzten und Buchstabengrößen zu dividiren.

Der Fall wird sich selten eräugnen, daß man mehrere Glieder entgegengesetzter Größen ohne Buchstabengrößen bey und zwischen denselben zu dividirrn habe, und noch seltener, daß sie sich, wie $(12 - 6 + 9 - 15 + 18) : (4 - 2 + 3 - 5 + 6) = 3$, würklich ohne Reduktion dividiren lassen. Gewöhnlich muß man hier reduciren, z. B. $(24 - 15 + 26) : (9 - 2) = 35 : 7$, der Quotient also 5. — Nach dem Erweise, daß gleiche Zeichen im Dividendo und Divisor im Quotienten Plus, und ungleiche in jenen in diesem Minusgrößen geben: sind die verschiedenen Fälle so zu ordnen: 1. Wenn Dividend und Divisor nur aus Einem Gliede in Buchstaben bestehen, $x^3 : x = x^2$, $a^2 : - a = - a$,

ab:

$ab : a = b$, $a : x = \frac{a}{x}$. 2. Wenn Coefficienten dabey sind, bald im Dividend allein, bald zugleich auch im Divisor, z. B. $4\,ab : b = 4a$, und $12x^3 : 6x = 2x^2$. 3. Wenn der Dividend aus mehrern Gliedern mit oder ohne Coefficenten bestehet, z. B. $12abc - 15ad : 3a$. 4. Wenn beydes Dividend und Divisor aus solchen mehrern Gliedern bestehen, z. B. $15a^2 - 18ab + 19a - 12b + 6 : 3a + 2$, wo Fälle, wie $36x^4 + 48ax^3 - 16a^3x - 4a^4 : 3x^2 - a^2$, in welchen bey der Berechnung der Partialprodukte, und Abziehung derselben von dem ganzen Dividendo, sich Glieder zeigen, welche im Dividendo nicht vorhanden sind, noch eine besondere Betrachtung verdienen. Endlich 5. Fälle, wo die Division entweder gar nicht geschehen kann, oder doch Brüche giebt, oder doch aus sonstigen Gründen lieber nur angedeutet wird.

Vom Maaße einer Zahl, gemeinschaftlichen Maaße mehrerer Zahlen, Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen.

31. Erklär. Eine Zahl mißt die andere, wenn sie in derselben ein oder mehrmal ohne Rest enthalten ist; jene heißt denn das Maaß dieser Zahl, und diese ist durch jene theilbar.

Zusatz: Jede ganze Zahl hat wenigstens die Einheit und sich selbst zum Maaße.

32. Erklärungen. Eine solche Zahl, welche blos sich und die Einheit zum Maaße hat, wie 11, 17, 79, heißt eine Primzahl, auch wol ursprüngliche Primzahl; eine Zahl, welche außer sich und der Einheit noch Maaßen hat, z. E. 14 = 2.7 und 24 = 2 . 12 = 2 . 3 . 4 heißt eine zusammengesetzte Zahl; ein Maaß, welches nicht blos eine, sondern mehrere Zahlen mißt oder theilt, heißt ein gemeinschaftliches Maaß dieser Zahlen, und wenn sich kein größeres ausfündig machen läßt, das größte gemeinschaftliche

Maaß derselben. Zwey oder mehrere Zahlen, welche gar kein gemeinschaftliches Maaß haben, heißen, wenn sie übrigens auch alle zusammengesetzte Zahlen sind, Primzahlen unter sich, z. B. 8 und 9; eben so 12, 35 und 143. Zahlen, welche das gemeinschaftliche Maaß 2 haben, heißen gerade, welche es nicht haben, ungerade Zahlen.

Zus. Ursprüngliche Primzahlen müssen auch Primzahlen unter sich seyn; nicht aber umgekehrt.

33. Lehrsatz 1. Wenn 2 Zahlen ein gemeinschaftliches Maaß haben, so haben ihre Summen und ihre Differenzen eben dasselbe gemeinschaftliche Maaß. 2. Haben entweder die Summe zweyer Zahlen und die eine Zahl selbst, oder auch die Differenz zweyer Zahlen und die eine Zahl selbst ein gemeinschaftliches Maaß: so hat die andere Zahl dieß Maaß ebenfalls, und es ist also ein gemeinschaftliches Maaß beyder Zahlen.

Zusatz: Gerades zu Geradem, und Gerades von Geradem giebt Gerades.

34. Lehrsatz. 1. Wenn von 2 Zahlen nur die Eine ein gewisses Maaß, die andere aber dasselbe nicht hat: so hat weder die Summe, noch die Differenz eben dieß Maaß. 2. Wenn weder die Summe noch die Differenz zweyer Zahlen eben das Maaß haben, was die Eine Zahl hat: so hat die andere dieß Maaß gewiß auch nicht.

Zusatz: Gerades zu Ungeradem, oder Ungerades vom Geradem, oder auch Gerades von Ungeradem giebt Ungerades.

35. Lehrs. Wenn keine von 2 Zahlen ein gewisses angenommenes Maaß haben: so hat doch so wol ihre Summe dieß Maaß, wenn die Reste bey dem Versuche des Messens der einzelnen Zahlen einmal das Maaß ausmachen, als auch ihre Differenz, wenn die beyde Reste beym Messen der einzelnen Zahlen gleich groß sind.

Zus. Ungerades zu Ungeradem giebt Gerades; Ungerades von Ungeradem giebt auch Gerades.

36. Lehrsatz. Wenn mehr als 2 Zahlen ein gemeinschaftliches Maaß haben: so hat ihre Summe dasselbe auch. Ist keine von ihnen, oder sind sie doch nicht alle durch ein und dasselbe Maaß theilbar: so ist ihre Summe nur dann durch dieses Maaß theilbar, wenn die Reste beym Messen der einzelnen Zahlen ein Aggregat geben, das durch dieses Maaß theilbar ist.

37. Lehrsatz. Wenn ein Faktor eines Produktes ein gewisses Maaß hat: so hat das Produkt eben dasselbe Maaß. Hat kein Faktor eines Produktes ein gewisses angenommenes Maaß: so hat das Produkt dasselbe nur dann, wenn das Produkt der Reste, welche bey dem Versuche des Messens der Faktoren entstanden, dieses Maaß haben

Zusatz. Gerades mit Geradem mutiplicirt, giebt immer ein gerades Produkt; auch

auch Gerades mit Ungeradem; aber Ungerades mit Ungeradem muß immer ein ungerades Produkt geben.

38. Lehrsatz. Wenn eine Zahl in allen ihren Ordnungen als Einer betrachtet ein durch 9 oder 3 theilbares Aggregat ausmacht, so ist diese Zahl durch 9 oder 3 theilbar.

39. Lehrsatz. Wenn eine Zahl in ihren geraden Ordnungen, die Ordnung der Einer mit eingeschlossen, ein durch 11 theilbares Aggregat giebt, und in ihren ungeraden Ordnungen lauter Nullen hat: so ist 11 ein Maaß dieser Zahl. Eben so umgekehrt in den ungeraden Ordnungen ein solches Aggregat, und in den geraden blos Nullen bewürkt eben dasselbe.

Zusatz 1. Wenn also eine Zahl, indem man ihre Zifern in den geraden Ordnungen besonders als Einer addirt, und in den ungeraden eben so verfährt, 2 durch 11 theilbare Aggregate giebt: so ist 11 ein Maaß dieser Zahl.

Zus.

Zus. 2. Wenn auch keins der beyden Aggregate durch 11 theilbar ist, die Reste aber, welche diese versuchte Theilung giebt, nur gleich sind: so sind die Zahlen selbst wiederum durch 11 theilbar.

40. Lehrsatz. Alle Zahlen, welche am Ende eine oder mehrere Nullen haben, sind durch 2, und 5, und 10 theilbar; alle, welche daselbst 2 Nullen haben, sind noch außerdem durch 4, 20, 25, 50, und 100; alle, welche 3 Nullen daselbst haben, sind ferner noch durch 8, 40, 125, 200, 250, 500 und 1000; alle welche die Zifer 2, oder 4, oder 6, oder 8 am Ende haben, sind durch 2; alle, welche daselbst die Zifer 5 haben, durch 5; alle, welche in den beyden niedrigsten Zahlordnungen 25, oder 50, oder 75 haben, sind durch 25; alle endlich, welche in den 3 niedrigsten Ordnungen durch 40, 125, 200, 250, und 500 theilbar sind, sind durch 40, 125, 200, 250 und 500 theilbar.

41.

41. Aufg. Ein Produkt, oder eine zusammengesetzte Zahl in ihre einfachen Faktoren aufzulösen.

Auflös. Untersuche, welche kleinste Primzahl ein Faktor dieser Zahl sey; von 2, 3, 5 und 11 verräth sich dieß nach dem Vorhergehenden gleich auf den ersten Blick; in Hinsicht der übrigen z. E. 7, 13, 17, 19, 23, 29 u. s. w. muß man Versuche machen, oder sich mit Tafeln helfen. Den Quotienten, welche die Zahl, durch ihr kleinstes einfaches Maaß dividirt, giebt, behandle nun wieder eben so, wie die Zahl selbst, und setze dieß Verfahren mit den respektiven Quotienten, welche die niedrigsten Primzahlen geben, so lange fort, bis zuletzt ein nicht mehr zusammengesetzter Quotient erscheint. Alle jene kleinsten Primzahlen und dieser letzte Quotient sind die einfachen Faktoren der gegebenen Zahl. Auf diese Weise ist z. B. 210 = 2 . 105; 105 = 3 . 35; 35 = 5 . 7; also 210 löset sich in die einfachen Faktoren 2, 3, 5, und 7 auf; eben so 945

= 3 .

= 3.3.3.5.7, und 770 = 2.5.7.11. Ueberhaupt wenn p = abcd, und a, b, c, d solche Primzahlen sind, daß a die kleinste, welche p, b die kleinste, welche bcd, c die kleinste, welche cd dividirt, und den untheilbaren Quotien d giebt: so sind a, b, c, d die einfachen Faktoren der Zahl p. Wenn uns irgend ein zusammengesetzter Faktor einer Zahl zum voraus bekannt ist, vielleicht auch sein Quotient, oder Mitfaktor schon: so kann man auch mit diesen beyden die Zerlegung anheben. Z. B. 945 = 35.27; 35 = 5.7; 27 = 3.3.3; also 3, 3, 3, 5, 7 sind die einfachen Faktoren der Zahl 945, wie oben. — Der Beweis liegt im Verfahren selbst. Man sucht ja die einfachen Faktoren, und sucht sie alle; man hat hier also alle einfachen Theile (Faktoren als Theile betrachtet, welche durch Multiplicirung in einander das Ganze ausmachen), und diese müssen dem Ganzen gleich seyn.

Zusatz 1. Jedes Produkt oder jede zusammengesetzte Zahl kann nur aus einer an Menge

und Größe bestimmten Anzahl einfacher Faktoren bestehen, d. i. nicht aus mehrern, und nicht aus wenigern, nicht aus größern, und nicht aus kleinern, wenn sie einfach bleiben sollen. Daher geben verschiedene Primzahlen zu Faktoren durchaus ein verschiedenes Produkt; z. B. 5 . 17, und 7 . 13, oder 3 . 19 . 29, und 5 . 17 . 23 können nicht einerley Produkt bewürken.

Diese Behauptung, welche der sel. Karsten (Th. 1. S. 78 - 85) so mühsam und fast künstlich beweiset, scheint mir bey wenigem Nachdenken über die eben gelehrte Operation gleich einzuleuchten.

Zusatz 2. Jede zusammengesetzte Zahl kann auch nur aus solchen zusammengesetzten Faktoren bestehen, als jene ihre einfachen an die Hand geben. Daher können selbst zusammengesetzte Faktoren theils mit einfachen nur dann einerley Produkt geben, wenn sie aus diesen einfachen, theils mit andern zusammengesetzten Faktoren nur dann, wenn sie aus eben denselben einfachen Faktoren

zu-

zusammengesetzt sind, woraus diese andern es waren. So giebt 77.15 nur daher einerley Produkt mit 3.5.7.11, weil 15 = 3.5, und 77 = 7.11; und 20.8 ist = 16.10, weil beyde Faktorenpaare aus einerley einfachen, nehmlich 2.2.2.2.2.5, bestehen.

Bekanntlich ist die Uebung in dieser Auflösung für die Lehre von den Brüchen, und für die von den Proportionen nebst den verschiedenen Rechnungen, welche sich auf die letztern gründen, nicht ohne beträchtlichen Nutzen. Sehr schätzbar ist daher auch hier folgendes in aller Hinsicht so brauchbares Werk, Logarithmische, Trigonometrische und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln, herausgegeben von Georg Vega, Unterlieutenant rc. Wien, bey E. v. Trattnern 1783, welches in der 2ten Tafel alle einfachen Faktoren der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 10500 enthält.

42 Aufg. Das größte gemeinschaftliche Maaß zweyer verschiedener Zahlen zu finden.

Auflösung 1. Zerlege sie in ihre einfachen Faktoren. Das Produkt aller gleichen einfachen Faktoren, welche beyde Zahlen in sich fassen, ist ihr größtes gemeinschaftliches Maaß. Der Beweis liegt im Verfahren.

Aufl. 2. Zumal bey Zahlen, deren gleiche einfache Faktoren mühsam auf obige Art zu finden wären, dividire die größere durch die kleinere, und diese durch den Rest, den sie eben gab, und so weiter den jedesmaligen Divisor durch seinen vorher gelassenen Rest. Der erste Divisor, welcher keinen Rest übrig läßt, ist der gegebenen Zahlen größtes gemeinschaftliches Maaß. Den Beweis von diesem Verfahren hat Karsten Th. I. §. 80 - 84; weil mir daselbst aber der 84 § zwar wahr aber unnöthig scheint: so sey mir erlaubt, hier einen Beweis kurz zusammen zu fassen. Von a und b kann es, wenn b die kleinere Größe ist, kein größeres gemeinschaftliches

Maaß geben als b. Ist b dasselbe nicht, und a also $= mb + r$: so kann das größte gemeinschaftliche Maaß nicht größer als r seyn, sonst mißt ein Maaß, welches b mißt, von a $= mb + r$ nur mb, und nicht r. Man hat also nur das größte gemeinschaftliche Maaß von b und r auf eben die Weise zu suchen; dieses ist nun entweder r, oder wenn $b = nr + s$ nicht größer als s. Jetzt ist von r und s das gr. gem. Maaß zu suchen, welches entweder s selbst ist, oder, wenn $r = ps + t$, nicht größer als t seyn kann. Von s und t sucht man nun das größte gem. Maaß, und untersucht zuerst, ob nicht t es selber sey, u. s. w. Entweder schon früher, oder hier in t, oder doch nächstens muß sich auf diese Are in u, v ꝛc. das gr. gem. Maaß antreffen lassen, oder man bekömmt durch die Division mit immer kleinern Divisoren endlich die Einheit zum Reste, d. i. die Zahlen haben kein gemeinschaftliches Maaß, sondern sind Primzahlen unter einander. Gesetzt $s : t = q$, so ist:

$$s = qt;$$

und, weil $r = ps + t$ war,

$$r = pqt + t;$$

und, weil $b = nr + s$ war,

$$b = npqt + nt + qt;$$

und, weil $a = mb + r$ war

$$a = mnpqt + mnt + mqt + pqt + t.$$

Man sieht, t ist von a und b ein gemeinschaftliches Maaß; es ist auch das größte, denn um a zu theilen, muste es b theilen, darum r, darum s, und endlich darum t; nun ist es ja das größte, welches t theilen kann, nemlich t selbst. Ein Beyspiel wäre $a = 4522$, $b = 629$.

Zusatz 1. Man sieht leicht ein, daß, wenn sich gleich gemeinschaftliche Maaße der 2 gegebenen Zahlen entdecken, man nur die Quotienten, welche die Zahlen, durch das größte dieser ihrer schon bekannten gemeinschaftlichen Maaße dividirt, geben, auf obige Art zu behandeln, und deren gr. gem. Maaß mit dem ersteren zu

mul-

multipliciren nöthig habe. Z. B. 10125 und 21000 haben nach § 40. 125 zum gemeinschaftlichen Maaß; jene ist = 125 . 81, diese = 125 . 168; von 81 und 168 ist 3 das gr. gem. Maaß, also von den Zahlen selbst ist es 375 = 3 . 125.

Zusatz 2. Wenn 2 Zahlen durch ihr größtes gemeinschaftliches Maaß dividirt werden: so sind die Quotienten Primzahlen unter sich.

43. Aufgabe. Von mehrern ungleichen Zahlen das größte gemeinschaftliche Maaß finden.

> Wenn sich unter den gegebenen Zahlen auch nur eine ursprüngliche Primzahl, oder nur ein Paar Primzahlen unter sich befindet: so spare man seine Mühe; die Zahlen können kein gemeinschaftliches Maaß haben.

Auflösung. Zerlege sie alle in ihre einfachen Faktoren; das Produkt der gleichen einfachen Faktoren, welche sich in allen befinden, giebt auch hier das größte gemeinschaftliche Maaß. Oder oft leichter: Suche das größte gemeinsch.

Maaß der beyden kleinsten Zahlen; denn von diesem Maaße und der nächst größeren Zahl das gr. gem. Maaß u. s. w. Dasjenige gr. gemeinsch. Maaß, welches man auf die Weise von der größten Zahl und dem zuletzt ausgemachten größten gem. Maaße findet, ist das gr. gem. Maaß aller gegebenen Zahlen. Z. B. von 128, 192, 224 und 272 haben 128 und 192 das gr. gem. Maaß 64; 64 und 224 haben 32; 32 und 272 haben 16 zum gr. gem. Maaße; also 16 ist das gr. gem. Maaß der Zahlen 128, 192, 224 und 272.

Zus. 1. Wenn sich eine Zahl darunter befindet, welche als Produkt aus 2 Primzahlen bekannt ist: so können alle Zahlen kein größeres gem. Maaß haben, als diese Zahl selbst, oder als einer von ihren einfachen Faktoren. Z. B. Zahlen, unter denen sich 91 befindet, können kein größeres gem. Maaß, als 7 oder 13 oder 91, haben. Eben so, wenn die eine von den gegebenen Zahlen ein bekanntes Produkt eis

ner Primzahl und eines nicht sehr zusammengesetzten Faktors ist: so kann derselben gr. gem. Maaß nicht größer als diese Zahl selbst, oder als ihre einfachen Faktoren, oder als die zusammengesetzten Faktoren seyn, welche aus diesen einfachen entstehen. Wenn sich unter mehrern Zahlen die Zahl 195 befindet: so kann deren gr. gem. Maaß nur 195, oder 65, oder 39, oder 15, oder 13, oder 5, oder endlich nur 3 seyn; denn 195 ist = 13. 15 = 39. 5 = 65. 3. Man erspart sich so oft viele Mühe.

Zus. 2. Wenn mehrere ungleiche Zahlen durch ihr gr. gem. Maaß dividirt werden: so müssen wenigstens zwey der Quotienten Primzahlen unter sich werden.

Von den Brüchen.

44. Erklär. Brüche sind Zahlen oder Größen, deren Menge nicht nach dem Maaße der Einheit, sondern nach Theilen der Einheit angegeben wird.

Die Art Brüche zu schreiben, die Ausdrücke Zähler und Nenner, die Eintheilung der Brüche in gewöhnliche und solche, welche eine Potenz der Zahl 10 oder 60 zum Nenner haben, in ächte und unächte, in reine und unreine oder gemischte, in reguläre und irreguläre oder gebrochene Brüche — dieß alles wird leicht erklärt und in Beyspielen gezeigt.

Zus. 1. Jeder Bruch ist dem Quotienten gleich, welchen Zähler und Nenner als ganze Zahlen, und zwar jenen als Dividend, diesen als Divisor, angesehen, geben.

Zus. 2. Einen Bruch in seinem Zähler und Nenner mit einerley Größe multipliciren, oder durch dieselbe dividiren, ändert seine Größe oder seinen Werth nicht; hingegen jenen, den Zähler, allein multipliciren, oder diesen, den Nenner, allein dividiren, multiplicirt den Bruch; eben so jenen dividiren, oder diesen multipliciren, dieß dividirt den Bruch. Man vergleiche §. 28. n. 9 — 14.

45. Grundſ. Alle Behauptungen des 7. 13. 18. 19. 21. 28. ja ſelbſt des 22ſten § gelten auch hier als Grundſätze, wenn man nur einige derſelben, nicht ſowol nach der beſondern Natur der Brüche abändert, als vielmehr ihr anpaſſend macht.

46. Aufg. Jede ganze Zahl in einen Bruch, von welchem Nenner man will, zu verwandeln.

47. Aufg. Einen Bruch aufheben, oder ihn auf ſeine kleinſte Benennung bringen.

Dieſe bekannte Operation, Zähler und Nenner mit ihrem größten gemeinſchaftlichen Maaße zu dividiren, nennt man auch, und vielleicht beſſer, den Bruch verkleinern. Verkleinert wird der Bruch, das heißt ſein Zähler und ſein Nenner, nicht ſein Werth, immer dadurch; aufgehoben aber eigentlich nur der unächte Bruch, deſſen Größe ſich genau in ganzen Zahlen ausdrucken läßt. Z. B. $\frac{6}{8}$ und $\frac{ab}{cb}$, auf $\frac{3}{4}$ und $\frac{a}{c}$ gebracht, ſind

verkleinert; $\frac{16}{8}$ und $\frac{3ab}{a}$ aber, in $\frac{2}{1} = 2$; und $\frac{3b}{1} = 3b$ verwandelt, sind aufgehoben.

Zus. Wenn Zähler und Nenner eines Bruchs Primzahlen unter sich sind: so ist der Bruch auf oder in seiner kleinsten Benennung.

48. Aufgabe. Einen unächten Bruch in ganze Zahlen, und, erforderlichen Falls, in ganze Zahlen mit angehängtem Bruche zu verwandeln.

49. Erklärung. Die Gleichnamigkeit schließt bey Brüchen noch die Einerleyheit der Nenner in sich; Brüche gleichnamig machen, oder wie man es nennt, sie auf einerley Benennung, einerley Generalnenner bringen, heißt in einem jeden Bruche Zähler und Nenner mit einer solchen ganzen Zahl multipliciren, oder auch durch eine solche dividiren, daß, dem Werthe unbeschadet, lauter Brüche von einerley Nenner erscheinen.

50. Aufgabe. Den Generalnenner, und zumal den kleinsten Generalnenner 2 und mehrerer Brüche zu finden.

Allgemein muß freylich von den Nennern a, b, c, d ihr Produkt abcd ein Generalnenner seyn; aber um den jedesmal kleinsten zu finden, unterscheide man folgende Fälle. 1. Wenn $b = ma$, $c = na$, $d = pa$, und die Brüche mit den Nennern b, c und d nicht auf ihrer kleinsten Benennung sind, sondern der Zähler von b auch durch m, der von c durch n, und der von d durch p theilbar ist: so ist a der Generalnenner, auf welchen alle übrige durch respektive Division mit m, n und p gebracht werden können. Z. B. $\frac{2}{5}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{3}{15}$ und $\frac{36}{20}$ werden so in $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{5}$ und $\frac{9}{5}$ unter dem kleinsten Generalnenner 5 gleichnamig. 2. Wenn $b = ma$, $c = mna$, $d = mnpa$, das ist, wenn alle kleinere Nenner Maaße des größten sind, die Brüche übrigens in ihrer kleinsten Benennung stehen: so ist mnpa oder d der kleinste Generalnenner, auf welchen die übrigen durch respektive Multiplikation mit mnp, np und p gebracht

gebracht werden. Auf diese Weise werden $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{8}$ und $\frac{13}{96}$ in $\frac{64}{96}$, $\frac{80}{96}$, $\frac{12}{96}$ und $\frac{13}{96}$ unter dem kleinsten Generalnenner 96 gleichnamig. 3. Wenn weder der obige seltene erste Fall, noch der eben angeführte zweyte vorhanden ist; wenn aber entweder alle Nenner doch noch ein oder mehrere gemeinschaftliche Maaße haben, oder sie doch nicht alle Primzahlen unter sich sind; wenn also z. B. a = ist den einfachen Faktoren m.n; b = m.p; c = p.q; d = r.s, d also keine ursprüngliche, aber doch mit a, b, c und e eine Primzahl unter sich; e endlich ursprüngliche Primzahl = e: so ist nicht abcde, das heißt mnmppqrse zum Generalnenner erforderlich, sondern mnpqrse ist einmal hinreichend, weil es ein Produkt ist, zu dem alle Nenner a, b, c, d, e erhoben werden können, und ist zweytens der kleinste Generalnenner, weil es das kleinste Produkt ist, worin die einfachen Faktoren der Zahlen a, b, c, d und e

nur

nur enthalten seyn können. Wenn 4. aber a, b, c und d Primzahlen unter sich sind: so ist kein kleinerer Generalnenner für sie möglich, als abcd.

51. Aufgabe. Brüche von verschiedenen Nennern, nach gefundenem kleinsten Generalnenner, auf diesen zu bringen, und sie nun als gleichnamige Brüche darzustellen.

52. Aufg. Zwey und mehrere Brüche in Zahlen, in entgegengesetzten und Buchstabengrößen zu einander zu addiren.

53. Aufg. Ganze Zahlen mit angehängten Brüchen, oder sogenannte unreine Brüche in unächte reine Brüche zu verwandeln.

54. Aufg. Brüche nicht nur zu Brüchen, sondern auch zu ganzen Zahlen mit und ohne angehängte Brüche zu addiren.

55. Aufg. Die Subtraktion in Brüchen zu verrichten, sowol in entgegengesetzten und Buchstabengrößen, als in durch bloße Zahlen ausgedrückten Brüchen.

56. Aufg. Die Multiplikation in Brüchen zu verrichten.

57. Aufg. Die Division in Brüchen zu verrichten.

58. Aufg. Brüche in benannten Zahlen gehörig zu behandeln, namentlich einen Bruch einer benannten Zahl von höherem Namen in ganze benannte Zahlen von niedrigerer Benennung, und umgekehrt — die letztern in einen Bruch von höherem Namen zu verwandeln.

59. Aufg. Einen gebrochenen oder irregulären Bruch in einen regulären zu verwandeln.

Von den Decimal- und Sexagesimalbrüchen.

60. Erklär. Decimalbrüche, oder zehntheiliche Brüche sind solche, deren Nenner eine positive in ganzen Zahlen ausgedrückte Potenz der Zahl 10 ist.

Also

Also $\frac{3}{10}$, $\frac{11}{100}$, $\frac{79}{1000}$ sind Decimalbrüche; $4\frac{7}{10}$, $5\frac{3}{100}$ Ganze mit Decimalbrüchen. Man schreibt die angeführten aber: 0, 3 oder 3^{-1}; 0, 11 oder 11^{-2}; 0, 079 oder 79^{-3}; 4, 7 oder 47^{-1}; 5, 003 oder 5003^{-3}. Die Erklärung dieser Minusordnungszahlen; der Beweis, daß man 0, 11 bequemer und gerade dasselbe geltend durch elf Hundertthel ausspreche, als wenn man ein Zehnthel und ein Hundertthel sagen wollte; ferner der Beweis, daß 4, 7 = sey 47^{-1}, das ist, daß 47 Zehntel einerley sind mit 4 Ganzen und 7 Zehnteln; endlich, daß man hinter jede in ganzen Zahlen oder in Decimalbrüchen, oder auch in Ganzen und Decimalbrüchen ausgedrückte Größe, unter richtiger Beobachtung der dadurch entstehenden neuen Decimalordnungen, so viele Nullen setzen könne, als man Belieben und vortheilhaft finde, ohne den Werth jener Größe im geringsten abzuändern, daß also 6, 4 und 6 mit 640^{-2} und

6000^{-3}, sage 640 Hundert — und 6000 Tausendtheilchen einerlei sey; diese Beweise nebst vorhergehender Erklärung sind leicht ausgeführt.

61. Aufg. Jeden gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Hier findet man, daß Brüche sich theils genau in Decimalbrüche verwandeln lassen, theils nicht; im letztern Falle kömmt man durch Annäherung der wahren Größe so nahe, als man für gut findet.

62. Aufg. Es wird verlangt, einen Decimalbruch wieder in einen gewöhnlichen zu verwandeln.

63. Aufg. Verrichte die Addition und Subtraktion in Decimalbrüchen.

Wenn Decimalbrüche in entgegengesetzten Größen vorkommen: so können sie, außer dem Einfluße der Plus und Minuszeichen, nichts besonders haben.

64. Aufgabe. Mit Decimalbrüchen zu multipliciren.

Vier Fälle gibt es hier: 1. wenn man einen Faktor in ganzen Zahlen, und einen in Decimalbrüchen hat; 2. wenn beyde Decimalbrüche sind; 3. wenn ein Faktor blos ganze Zahlen, und der andere ganze Zahlen nebst Decimalbrüchen hat; 4. wenn beyde Faktoren Ganze und Decimalbrüche haben; Fälle, welche alle gleich leicht zu behandeln sind, wenn man nur bedenkt, daß $a^{-x} . b^{-r}$ (a und b als Ziefern, und x und r als ihre Ordnungszahlen angesehen) nicht ab^{-x}, auch nicht ab^{-r}, sondern $ab^{-x + (-r)}$, das ist $ab^{-(x+r)}$ geben müsse; daß eben so $a^{-x} . b^{+r}$, wenn r größer ist als x, ab^{r-x}, und, wenn x größer ist als r, $a^{-(x-r)}$ gebe; endlich daß $a^{-x} . b^{x}$, ab^{0} ausmachen müsse.

65. Aufg. In Decimalbrüchen zu dividiren.

Die verschiedenen Fälle kann man sich hier leicht denken; auch sieht man bald ein, daß erforderlichen Falls dem Dividendo nach §. 60 Nullen anzuhängen sind, und daß nicht selten nur durch Annäherung sich ein beliebig mehr oder weniger genauer Quotient finden lasse.

66. Erklärung. Die Weglassung aller Partialprodukte nach der Ordnung — 6, oder doch — 9, heißt die abgekürzte Multiplikation; die abgekürzte Division ist, wenn, nachdem das ganze bis zur Ordnung — 6, oder etwa — 9, angegebene, oder auch durch Nullen bis dahin supplirte Dividendum durch den Divisor dividirt ist, dem alsdenn noch vorhandenen Reste keine neue Nullen mehr angehängt werden, sondern man ihn so mit dem Divisor dividirt, daß man dessen letzte Ziefer wegfallen läßt, und eben so die ferneren Reste mit dem stets um eine neue Ziefer von hinten abgekürzten Divisor theilt, bis keine Division mehr Statt haben kann.

67. Aufgabe. Die abgekürzte Multiplikation und Division zu verrichten.

68. Erklär. Sexagesimalbrüche sind solche, deren Nenner eine positive in ganzen Zahlen ausgedrückte Potenz der Zahl 60 ist.

Stunden und Grade werden vorzüglich in solche Theile getheilt. Also 4 Stunden 28 Minuten 3 Secunden 18 Tertien wären in solchen Sexagesimalbrüchen

$4 + \frac{28}{60} + \frac{3}{3600} + \frac{18}{216000}$ Stunden. Man schreibt aber:

$4^{0},\ 28^{I},\ 03^{II},\ 18^{III}$, oder

$4^{0},\ 28^{-1},\ 03^{-2},\ 18^{-3}$.

69. Aufg. Gewöhnliche und zehntheilliche Brüche in Sexagesimalbrüche, und umgekehrt diese in jene zu verwandeln.

70. Aufg. Die Addition und Subtraktion in Sexagesimalbrüchen zu verrichten.

71. Aufg. Sexagesimalbrüche mit Sexagesimalbrüchen zu multipliciren.

Die Ausrechnung der Aufgabe: 4^{0}, 25^{I}, 15^{II}, 03^{III} . 3^{0}, 12^{I}, 08^{II}, 15^{III} = 14^{0}, 09^{I}, 24^{II}, 37^{III}, 55^{IV}, 09^{V}, 45^{VI} faßt alle Fälle, welche hier vorkommen können, in sich.

72. Aufgabe. In Sexagesimalbrüchen dividiren.

Beyspiel: 43^{0}, 16^{I}, 15^{II}, 53^{III}, 03^{IV}, 18^{V} : 5^{0}, 32^{I}, 28^{II}, 15^{III} = 7^{0}, 48^{I}, 32^{II}, 24^{III}.

Von den Potenzen und Wurzeln.

73. Erklärungen. Positive, in ganzen Zahlen ausgedrückte, Potenzen oder Dignitäten einer Größe sind die Größe selbst, und alle Produkte, welche sie, mehrmal als Faktor hingesetzt, macht. Die Größe selbst ist die erste Potenz; diese erste Potenz, oder die Größe selbst, heißt in Rücksicht auf andere Potenzen, welche aus ihr berechnet werden können, die Wurzel. Das Produkt von 2, und 3, und 4 glei-

gleichen Faktoren hat außer dem Namen der 2ten, 3ten, und 4ten Potenz noch den des Quadrats, Cubus oder Würfels und Biquadrats; das Produkt von 5 und mehrern, z. B. n gleichen Faktoren heißt nur die 5te, die nte Potenz. Wenn man so die 2te, 3te, nte Potenz sagt: so heißt dies der Grad oder Name der Potenz, und dieser Grad wird durch eine denselben in Ziefern oder Buchstaben ausdrückende Bezeichnung zur rechten an dem Kopfe der Wurzel angedeutet, welche Bezeichnung man daher den Exponenten der Potenz nennt; also x^2, x^3, x^n, wo x die Exponenten 2, 3, n hat, heißt so viel, als erhebe x zur Potenz vom 2ten, 3ten, nten Grade, d. i. denke, und berechne dir erforderlichen Falls, x in der 2ten, 3ten, nten Potenz. Die Nullpotenz ist die Einheit; also $4^0 = 1$, und allgemein $x^0 = 1$. Minuspotenzen sind die Einheit, dividirt durch diejenige positive Potenz der Wurzel, welche der Exponent anzeigt; also $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4.4.4} = \frac{1}{64}$; allgemein $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

 Das

Das Zeichen $^n\sqrt{}$ vor x heißt: siehe x als die nte Potenz einer unbekannten Wurzel an, und suche diese Wurzel; $\sqrt{}$ gewöhnlich Radix genannt, heißt daher das Wurzelzeichen, und n in $^n\sqrt{}$ der Wurzelexponent; das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ ohne Exponent zeigt an, daß man die 2te Wurzel suchen soll, welche man gewöhnlich die Quadratwurzel, so wie die Wurzel der 3ten und 4ten Dignität gewöhnlich die Cubikwurzel, und die Biquadratwurzel nennt. Größen, wie die folgenden $^3\sqrt{4}$, oder $^4\sqrt{16^2}$, und allgemein $^n\sqrt{x^m}$ heißen Wurzelgrößen; die Größe, vor welcher, wie hier vor x^m, das Wurzelzeichen steht, heißt die Größe unter dem Wurzelzeichen. Bruchpotenzen sind Wurzelgrößen, in welchen der Wurzelexponent als Nenner unter den als Zähler angenommenen Exponenten der Potenz gesetzt wird; also $^n\sqrt{x^m}$ ist als Bruchpotenz $x^{\frac{m}{n}}$, wo $\frac{m}{n}$ ächter und unächter Bruch, vom kleinsten Namen, und auch nicht seyn kann.

Poten-

Potenzengrößen sind für die Addition und Subtraktion gleichnamig, wenn sie einerley Wurzel und zugleich einerley Exponenten haben; z. B. $5 . 4^3$ und $3 . 4^3$ macht addirt $8 . 4^3$, und das letztere vom erstern subtrahirt, läßt $2 . 4^3$ übrig; so macht allgemein $a . x^n$ und $b . x^n$ addirt $(a + b) x^n$, und dieses von jenem subtrahirt $(a - b) x^n$ aus; eben so giebt $a^m\sqrt{x^n}$ zu $b^m\sqrt{x^n}$, $(a + b)^m\sqrt{x^n}$, und, dieses von jenem subtrahirt, $(a - b)^m\sqrt{x^n}$, d. i. Wurzelgrößen sind für die Addition und Subtraktion gleichnamig, wenn bey einerley Wurzelexponenten sich gleiche Größen unter dem Wurzelzeichen befinden. Für die Multiplikation und Division sind Potenzengrößen gleichnamig, wenn sie nur einerley Wurzel haben; und Wurzelgrößen gleichnamig, wenn sie nur einerley Wurzelexponenten haben; bey jenen sind also x^n und x^m, bey diesen $^n\sqrt{x}$ und $^n\sqrt{z}$ für diese beyden Rechnungsarten schon gleichnamig.

74. Aufgabe. Jede Größe, sie mag in Zahlen oder Buchstaben, Ganzen oder Brüchen, positiv oder negativ, ausgedrückt seyn, zum Quadrat, Cubus, und jeder höhern Potenz zu erheben, wie auch ihre in ganzen Zahlen ausgedrückten Minuspotenzen zu berechnen.

Zusatz 1. Die positiven in ganzen Zahlen ausgedrückten Potenzen eines ächten Bruchs geben immer kleinere Brüche, als die Wurzel ist, und zwar desto kleiner, je höher der Grad der Potenz ist; die eben so ausgedrückten Minuspotenzen derselben sind aber immer größer als die Wurzel, ja immer größer als die Einheit, und lassen sich nicht selten genau in ganzen Zahlen ausdrücken.

Zus. 2. Alle Potenzen einer bejahenden Größe sind bejahend.

Zus. 3. Eine verneinende Größe wird in den Potenzen von geraden Exponenten stets bejahend, und in der von einem ungeraden Exponenten stets verneinend.

Zusatz 4. Folglich kann eine Minusgröße, als eine Potenz von der 2ten, 4ten, und jeder andern geraden Ordnung angesehen, weder aus einer Plus-, noch aus einer Minuswurzel, also aus gar keiner Wurzel entstehen; man nennt solche Wurzelgrößen, als $\sqrt{-4}$, und allgemein, wenn n gerade ist, $\sqrt[n]{-x}$ eine unmögliche oder eingebildete Wurzel. Es ergiebt sich, daß die ganzen geraden Potenzen dieser eingebildeten Wurzeln möglich, die ungeraden aber unmöglich ist.

Zus. 5. Jede Potenz und jede Wurzel der Einheit ist und bleibt die Einheit; 1^n, und 1^0, und 1^{-n}; und $1^{\frac{m}{n}}$, und $\sqrt[n]{1}$, alles dies ist $= 1$.

Zus. 6. $\sqrt[n]{x^n}$ ist $= x$; d. i. beydes, entweder erstlich eine Größe zu einer gewissen Potenz erhoben, und aus dieser wieder die Wurzel von eben der Dignität gesucht, oder erstlich eine gewisse Wurzel einer Größe gesucht, und diese Wurzel wieder zu der eben so vielsten Potenz ero

hoben, beydes, kann die Größe nicht abändern.

Zusatz 7. Die Potenz eines Produkts ist dem Produkte eben der Potenz der Faktoren desselben gleich; also $10^2 = 2^2 . 5^2$; überhaupt $(ab)^n = a^n b^n$; und wenn $a = c . d$, $b = e . f$: so ist $(ab)^n = c^n d^n e^n f^n$.

Zus. 8. Man erhält aus jeder Quadratzahl x^2 von x das Quadrat der um Eins höhern Größe, der Größe $x + 1$, wenn man zu demselben die Wurzel x und die um Eins höhere Zahl $x + 1$ addirt; also aus $49 = 7^2$ entsteht $8^2 = 49 + 7 + 8 = 64$; eben so aus $\frac{9}{16} = (\frac{3}{4})^2$ wird $\frac{7^2}{4^2} = \frac{9}{16} + \frac{12}{16} + \frac{28}{16} = \frac{49}{16}$.

75. Lehrsatz. Keine Potenz eines wahren unächten Bruchs kann eine ganze Zahl werden.

Man versteht dies zunächst von positiven in ganzen Zahlen ausgedrückten Potenzen; indessen ist es, mit Ausnahme der Nullpotenz (welche Ausnahme sich von selbst ergiebt) von jeder Art der Dignitäten wahr.

Zus.

Zusatz 1. Da also die Zahlen zwischen 1, 4, 9 u. s. w., d. i. die Zahlen 2, 3, 5, 6, 7, 8, keine ganze Zahl, und auch keinen unächten Bruch zur Quadratwurzel; da eben so die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 u. s. w., welche zwischen 1, 8, 27 u. s. w. liegen, auch weder ganze Zahlen, noch unächte Brüche zu Cubikwurzeln; und da überhaupt, wenn $a^n = R$, und $(a + 1)^n = R$, die Zahlen zwischen Q und R keine nte Wurzel haben können: so nennt man, wenn man gleichwol jene Zahlen, 2, 3, 5, 6, 7 2c. als Quadrate, oder Würfel, und die zwischen Q und R liegenden ganzen Zahlen als n Potenzen ansehen muß, dieselben unvollkommene Quadrate, unvollkommene Würfel, unvollkommene n Potenzen, deren Wurzeln nicht anders als durch Wurzelgrößen, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[n]{(Q + 1)}$, ausgedrückt werden können; diese Wurzeln unvollkommener Potenzen heißen irrationale oder surdische Größen.

Zus. 2. Diese irrationalen Größen werden, wenn man sie zu Potenzen erhebt, bald rational,

nal, bald irrational, je nachdem der Grad der Potenz durch den Wurzelexponenten theilbar, oder nicht theilbar ist. Wenn $\sqrt[n]{x}$ irrational ist: so ist $(\sqrt[n]{x})^m$ rational, falls $\frac{m}{n}$ = einer ganzen Zahl; irrational, falls $\frac{m}{n}$ ein wahrer unächter Bruch ist.

76. Lehrsatz. Jede zweytheilichte Wurzel oder jedes Binomium $a + b$ giebt in jeder ganzen positiven Potenz n folgende in Ansehung der Gliederzahl, Potenzen und Coefficienten in diesen Gliedern genau bestimmte Reihe:

Anfangs- glied. M i t t e l

I II

$$a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{1}a^{n-2}b^2 +$$

g l i e d e r,

III

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3$$

d e r e n

IV

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 +$$

Fehlende Mittelglie-

. . . .

A n z a h l

der, weil der Werth von n unbestimmt

Ein solches Mittelglied x.

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\frac{n-(x-2)}{x-1}\cdot\frac{n-(x-1)}{x}a^{n-x}b^x + \cdot\ \cdot\ \cdot$$

immer

i m m e r

ist. Vorletztes, d. i. n — 2tes Mittelglied

$$\ldots\ldots + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \ldots \frac{4}{n-(n-3)} \cdot \frac{3}{n-(n-2)} a^{n-(n-1)} b^{n-2}$$

n — 1 i st.

Letztes, oder n — 1tes Mittelglied.

$$+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \ldots \frac{3}{n-(n-2)} \cdot \frac{2}{n-(n-1)} a^{n-(n-1)} b^{n-1}$$

Schlußglied

$$+ b^n \,.\,;$$

also $(a+b)^n$ ist $= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 \ldots\ldots + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \ldots \frac{n-(n-3)}{n-(n-2)} \cdot \frac{n-(n-2)}{n-(n-1)} ab^{n-1} + b^n.$

Dieser

Dieser Lehrsatz heißt das Theorema Binomiale; wenn $a = 3$, $b = 2$, und $n = 4$ gesetzt wird: so ist folgendes ein leicht zu übersehendes Exempel desselben:

$5^4 (625) = (3 + 2)^4 = 3^4 + \frac{4}{1} \cdot 3^3 \cdot 2 + \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3^2 \cdot 2^2 + \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2^3 + 2^4$; d. i. 81 + 216 + 216 + 96 + 16, welches 625 ausmacht.

Beweisführung. Es ist I zu beweisen: $(a + b)^n$ enthalte $1 + n$ Glieder, wovon man das erste vortheilhaft das Anfangsglied, das letzte das Schlußglied, und die dazwischen liegenden $n - 1$ Glieder die Mittelglieder nennt. Beweis: Es ergibt sich aus dem Wesen der Multiplikation mit $a + b$, daß die Multiplikation mit a die Anzahl der Glieder nicht vermehre, daß aber die Multiplikation mit b stets bey jeder um Eins höhern Potenz hinten ein neues Glied anhänge. Da nun $(a + b)^1$, die erste Potenz, 2 Glieder hat, so bekömmt die 2te Potenz $(a + b)^2$, 3 Glieder, die 3te 4, die

4te 5, und also die nte Potenz $1 + n$ Glieder, und hat demnach Ein Anfangs —, Ein Schluß- glied, und $n - 1$ zwischen — oder Mittel- glieder.

Es ist II. zu beweisen: daß in diesen $1 + n$ Gliedern n mal Potenzen von a, und auch n mal Potenzen von b vorkommen; und zwar 1) so, daß jene vom Anfangsgliede an bis zum letzten Mittelgliede inklusive, diese vom ersten Mittel- gliede bis zum Schlußgliede inklusive vorhanden sind; 2) so, daß jene, die Potenzen von a, im Anfangsgliede mit dem Exponenten n anheben, diesen Exponenten in jedem neuem Gliede um Eins verringern, und so in dem letzten Mit- telgliede mit dem Expon. 1 endigen, diese hin- gegen, die Potenzen von b, in dem ersten Mit- telgliede mit dem Expon. 1 anheben, diesen Exponenten in jedem neuen Gliede um Eins ver- mehren, und so in dem Schlußgliede mit dem Exponenten n aufhören; daß also jedes Mittel- glied seine Zahl zum Exponenten von b, und n

weniger

weniger, seine Zahl zum Exponenten von a habe; daß demnach folgendes ein richtiges Schema dieser Potenzen und ihrer Exponenten sey:

Anfangsglied	erstes Mittelglied	zweytes Mittelglied	xtes Mittelglied
a^n	$a^{n-1} b$	$a^{n-2} b^2$	$a^{n-x} b^x$,

letztes Mittelglied	Schlußglied
ab^{n-1}	b^n.

Beweis: In der Multiplikation mit $a + b$ hat blos a auf die Anzahl und Exponenten der Potenzen von a, und blos b auf die Anzahl und Exponenten der Potenzen von b Einfluß. Da nun, wenn $n = 1$, in $a + b = a^1 + a^0 b$, a Einmal vorkömmt mit dem Exponenten 1, und hieraus für $n = 2$ durch die Multiplikation mit a, $a^2 + a^1 + a^0$ wird, also in $n = 2$ zweymal die Potenz a mit dem fallenden Exponenten 2, 1 sich zeigt; auch eben so in $n = 3$, $a^3 + a^2 + a^1 + a^0$ das ist 3 mal die Potenz von a mit dem fallenden Exponenten 3, 2, 1 vorhanden

 ist:

ist: so sieht man schon das Gesetz, daß in $n=n$ die Potenzen von a auf folgende Art: $a^n + a^{n-1} + a^{n-2} \ldots + a$, das ist n mal mit einem stets um Eins fallenden Exponenten vorhanden seyn werden.

Auf dieselbe Weise wird aus $a + b = ab^0 + b^1$ durch die Multiplikation mit b in der zweyten Potenz in Ansehung der Anzahl und der Exponenten der Potenz b, $b^0 + b^1 + b^2$, in der 3ten $b^0 + b^1 + b^2 + b^3$, in der nten Potenz $b^0 + b^1 + b^2 \ldots + b^n$, das ist die Potenzen von b heben mit dem ersten Mittelgliede an, ihrer sind n, und der Exponent wird immer um Eins größer.

Endlich ist III in Ansehung der Coefficienten zu beweisen, daß das Anfangs- und Schlußglied den Coefficienten 1, oder, weil doch die Einheit nicht multiplicirt, daß sie keine Coefficienten haben; daß ferner in Hinsicht der Mittelglieder folgendes Gesetz eintrete: Jedes Mittelglied hat den Quotienten zum Coefficienten,

wel-

welcher entsteht, wenn man von der fallenden Reihe $n, n-1, n-2, n-3 \ldots n-(n-3)$ oder 3, $n-(n-2)$ oder 2, und von der steigenden $1, 2, 3, 4 \ldots n-2, n-1$, in dieser Ordnung von jener so viele Zahlen zu Faktoren des Dividendums, und in eben derselben Ordnung von dieser so viele Zahlen zu Faktoren des Divisors macht, als die Zahl des Mittelgliedes anzeigt; daß also in jedem Mittelgliede x, $n, n-1 \ldots n-(x-1)$ die Faktoren des Dividendums, und $1, 2 \ldots x$ die Faktoren des Divisors sind: daß demnach folgendes ein richtiges Schema aller Coefficienten in $(a+b)^n$ ist:

Anfangsglied		erstes Mittelglied		zweytes Mittelglied	
1	$+$	$\frac{n}{1}$	$+$	$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}$	$+$

xtes Mittelglied

$$\ldots \ldots \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-(x-1)}{x} +$$

 letztes

letztes Mittelglied — Schluß-glied

$$\ldots \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-(n-2)}{n-1} + 1;$$

daß folglich die ganze Reihe $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \ldots \frac{n-(n-2)}{n-1} a b^{n-1} + b^n = (a+b)^n$ in Ansehung der Gliederzahl $1+n$, und der Potenzen und Coefficienten in diesen Gliederen als erwiesen anzusehen ist.

Beweis: 1) das Anfangs- und Schluß-glied können keine Coefficienten erhalten, denn jenes entsteht aus der Multiplikation das a in irgend einer Potenz mit a, eben so dieses durch Multiplikation des b in irgend einer Potenz mit b; wenn Faktoren keine Coefficienten haben, kann auch ihr Produkt keinen erhalten. 2) In Ansehung des ersten Mittelgliedes ist zu erweisen, daß

daß es immer $\frac{n}{1}$, das ist n zum Coefficienten habe. Man bemerket gleich aus der Multiplikation mit a + b, daß jedes Mittelglied einer höhern Potenz die Summe der Coefficienten eben des und des vorhergehenden Gliedes der nächst niedrigen Potenz enthalte; a trägt nemlich die Coefficienten eben des Gliedes, und b die des zunächst vorhergehenden Gliedes der niedrigern Potenz als Coefficienten in das Glied der nächst höheren Potenz hinüber. Die Coefficienten des ersten Mittelgliedes irgend einer Potenz sind daher immer = der Summe der Coefficienten des ersten Mittelgliedes und des Anfangsgliedes der nächst vorhergehenden Potenz; letzteres ist aber, wie oben gezeigt, immer ohne Coefficienten; also trägt dasselbe immer nur die Einheit über, d. i. die Coefficienten des ersten Mittelgliedes werden in jeder neuen Potenz um Eins größer, steigen immer mit der Einheit. Nun muß in $(a + b)^1$ b das erste Mittelglied vorstellen, weil aus demselben und dem vorhergehenden a das erste Mit-

telglied in der 2ten Potenz in Ansehung der Coefficienten erwächst; hier ist bey b der Coefficient 1; also im ersten Mittelgliede von $(a+b)^2$ ist er 2; in dem von $(a+b)^3$, 3, und überhaupt in dem von $(a+b)^n$ ist er n: der Coefficient des ersten Mittelgliedes ist immer dem Exponenten derjenigen Potenz, welche man sucht, gleich. 3) Von dem Coefficienten des 2ten Mittelgliedes ist zu erweisen, daß er immer $= \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}$ sey. Er enthält die Summe der Coefficienten des 2ten und ersten Mittelgliedes der nächst niedrigern Potenz. Nun kehrt die Operation, es sey

in n = 1 der Coefficient des 2ten Mittelglieds. 0, der des ersten 1)

also in n = 2 „ „ „ 1 „ „ 2

— = 3 „ „ 1 + 2 = 3 „ „ 3

— = 4 „ „ 1 + 2 + 3 = 6 „ 4

— = 5 „ 1 + 2 + 3 + 4 = 10 „ 5 u. s. w.

also in n = n, 1 + 2 + 3 + .. n − 1 = (1 + 2 + 3 + .. n − 1), n

Man beweiset leicht schon hier aus der nachher folgenden Lehre von der Summe arithmetischer Reihen, daß $1 + 2 + 3 + \ldots n - 1 = n . \frac{n-1}{2}$, das ist $= \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2}$ seyn müsse. 3) Von den Coefficienten der übrigen Mittelglieder ist darzuthun, daß jeder so viele Faktoren von $n, n-1, \ldots n-(n-2)$ im Dividendo, und so viele von $1, 2, \ldots n-1$ im Divisor enthalte, als die Zahl des Mittelgliedes anzeigt; daß also das 3te Mittelglied $\frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3}$, das 4te $\frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{n-3}{4}$, das 5te $\frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{n-3}{4} . \frac{n-4}{5}$, das $n-1$te oder letzte Mittelglied $\frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} \ldots \ldots \frac{n-(n-2)}{n-1}$ im Coefficienten habe. Man be-

merke A, daß das 3te Mittelglied in der 4ten Potenz, das 4te in der 5ten, das 5te in der 6ten, und das $n - 1$te in der nten Potenz das letzte Mittelglied sind, und daß die Coefficienten jedes letzten Mittelgliedes aus der Summe der Coefficienten des Schlußgliedes und des letzten Mittelgliedes der nächst niedigern Potenz erwachsen. Nun ist der Coefficient des Schlußgliedes stets 1; folglich müssen die Coefficienten des 3ten oder letzten Mittelgliedes in $n = 4$, $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$ gleich seyn $1 + \left(\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}\right)$ aus $n = 3$; eben so das 4te oder letzte Mittelglied in $n = 5$, an Coefficienten $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} = 1 + \left(\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\right)$ aus $n = 4$; so muß dies immer in allen letzten Gliedern der Fall seyn, und auch das $n - 1$te oder das letzte Glied in der höchsten Potenz n, muß an Coefficien-

ten $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{1}\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{n-(n-2)}{n-1} =$

$1+\left(\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{n-(n-2)}{n-(n-1)}\right)$ aus der nächst niedrigern Potenz haben. Dies ist richtig; denn z. B. in $n=4$ ist im 3ten oder letzten Mittelglied $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3} = 1 +$ $\left(\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\right)$ aus $n = 3$, weil letzteres, wenn man n, welches 3 war, den Werth 4 giebt, $= 1+\left(\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\right) = 1 +$ $\left(\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{n-2}\right)$; da $\frac{n-2}{n-2} = \frac{n-2}{2}$ die Größe nicht verändert: so ist nur erforderlich, daß $1+\frac{n-1}{1} =$ sey $\frac{n}{3}\cdot\frac{n-1}{1}$; und das ist es, denn $\frac{1+\frac{n-1}{1}}{\frac{n-1}{1}} = \frac{\frac{n}{1}}{\frac{n-1}{1}} = \frac{n}{n-1} = \frac{n}{3}$.

Also

Also $1 + \left(\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2}\right) = \frac{n}{3} \cdot \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2}$, das ist, da die Ordnung der Faktoren gleichgültig ist, $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$. Eben so ist in $n = 5$ der Coeffic. des 4ten oder letzten Mittelgliedes $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} = 1 + \left(\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\right)$ aus $n = 4$; denn, $n = 5$ gesetzt, ist das letztere $1 + \left(\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3}\right) = 1 + \left(\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{n-3} \cdot \frac{n-3}{n-2}\right)$; $\frac{n-2}{n-3} \cdot \frac{n-3}{n-2}$ ändert die Grösse nicht, und $1 + \frac{n-1}{1} = \frac{n}{4} \cdot \frac{n-1}{1}$, weil $\frac{n}{n-1}$ hier $\frac{n}{4}$ ist; so entsteht $1 + \left(\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3}\right) =$

$= \frac{n}{4} \cdot \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3} =$ $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4}$. Auf völlig gleiche Weise ist in $n = 6$, $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \frac{n-4}{5} = 1 + \left(\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4}\right)$ aus $n = 5$; das letztere ist, wenn $n = 6$, $1 + \left(\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{n-4} \cdot \frac{n-3}{n-3} \cdot \frac{n-4}{n-2}\right) = 1 + \frac{n-1}{1} = \frac{n}{5} \cdot \frac{n-1}{1} = \frac{n}{5} \cdot \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3} \cdot \frac{n-4}{4} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \frac{n-4}{5}$. Hieraus ersieht man, daß in $1 + \left(\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2}\right.$ u.s.w.$\left.\right)$, die

die Faktorenreihen mögen, je nachdem n einen hohen oder niedrigen Werth hat, so lang oder so kurz werden, als sie wollen, alsdenn, wenn man die Faktoren des Divisors auch mit n schreibet, alles bis auf $1 + \frac{n-1}{1}$ sich aufhebt. Nun ist $\left(1 + \frac{n-1}{1}\right) : \frac{n-1}{1}$ immer $\frac{n}{n-1}$; also entstehen allenthalben die Faktoren $n, n-1, n-2, \ldots n-(n-2)$ im Dividendo, und die Faktoren $1, 2, 3, \ldots \ldots n-1$ im Divisor. Es ist demnach

$$\frac{n.\,n-1.\,n-2 \ldots\ldots n-(n-2)}{1.\;2.\;3 \ldots\ldots n-1}$$

der Coefficient für jedes letzte Mittelglied; welche Reihen kürzer oder länger werden, je nachdem n einen höhern oder niedrigern Werth hat. Auch erhellet zugleich, daß der Coefficient jedes letzten Mittelgliedes gleich ist dem Coefficient

cient des ersten Mittelgliedes in eben der Potenz; $1 + \frac{n-1}{1}$ ist $= \frac{n}{1}$. Man ersieht B., daß jedes sonstige Mittelglied einer Potenz, aus eben dem und dem nächstvorhergehenden Mittelgliede der nächst niedigern in Ansehung der Coefficienten entsteht. Also

in $n = 5$ muß das 3te Mittelglied $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} = \left(\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}\right) + \left(\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\right)$ aus $n = 4$; so in $n = 6$ muß das 3te $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} = \left(\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}\right) + \left(\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\right)$ aus $n = 5$; auch in $n = 6$ muß d. 4te $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} = \left(\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\right)$

+

$+\left(\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\right)$ aus $n=5$; und überh. in $n=n$ das xte $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\ldots$

$\frac{n-(x-1)}{x}=\left(\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(x-2)}{x-1}\right)+$

$\left(\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(x-1)}{x}\right)$ aus $n=n-1$.

Ganz richtig; denn aus $n=4$ ist $\left(\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\right)$

$+\left(\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\right)$, wenn man

$n=5$ setzt $=\left(\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\right)+$

$\left(\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\right)=\left(\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\right)\cdot$

$\frac{n-3}{3}+1=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n}{3}=$

$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}$, wie verlangt. Eben

so

so im 4ten Mittelgliede der 6ten Potenz;

$$\left(\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\right)+\left(\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\right)$$

aus n = 5, ist n nun = 6,

$$=\left(\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\right)+\left(\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\cdot\frac{n-4}{4}\right)=$$

$$\left(\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\right)\cdot\frac{n-4}{4}+1=\frac{n-1}{1}\cdot\left(\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\cdot\frac{n}{4}\right)=$$

$$\frac{n}{1}\left(\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\right)\cdot\frac{n-3}{4}.$$

Ueberhaupt ergiebt sich für jedes Mittelglied x sein Coefficient:

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\ldots\ldots\frac{n-(x-1)}{x}$$

aus der Summe der Coefficienten des xten und x—1ten Gliedes der nächst niedrigern Potenz,

aus

aus $\left(\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdots\frac{n-x-2}{x-1}\right)+$

$\left(\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-(x-2)}{x-1}\cdot\frac{n-(x-1)}{x}\right)$,

jetzt, wo n eine Einheit mehr enthält,

$=\left(\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots\frac{n-(x-1)}{x-1}\right)+$

$\left(\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots\frac{n-(x-1)}{x-1}\cdot\frac{n-x}{x}\right)$

$=\left(\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots\frac{n-x-1}{x-1}\right)\cdot$

$\frac{n-x}{x}+1$

$=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots\frac{n-(x-1)}{x-1}\cdot\frac{n}{x}=$

$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdots\cdots\frac{n-(x-1)}{x}$

Es ist demnach $(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b +$

$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$

$a^{n-3} b^3 + \ldots \ldots$

$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \ldots \ldots \frac{n-(n-2)}{n-1}$

$ab^{n-1} + b^n$ völlig erwiesen.

Zusatz 1. Die Wahrheit dieses Lehrsatzes erhärtet sich für die Coefficienten zum Ueberfluß noch dadurch, daß

$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \ldots \ldots \frac{n-(n-2)}{n-1} \cdot \frac{n-(n-1)}{n}$

$= 1$ ist, also den Coefficienten des Schlußgliedes richtig angiebt; daß ferner

$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \ldots \ldots \frac{n-(n-1)}{n} \cdot \frac{n-n}{n-n}$

$= 0$ wird, d. i. daß ferner nach dem Schlußgliede keine Coefficienten und Potenzen Statt finden können, zumal da

$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \ldots \ldots \frac{n-n}{n+1} \cdot \frac{n-(n+1)}{n+2}$,

und

und jede noch weiter fortgesetzte Faktorenanzahl so gar negative Größen geben.

Zusatz 2. $(a-b)^n$ giebt eben die Reihe, nur mit der Abänderung, daß jedes ungerade Mittelglied, das Schlußglied als das n'te Mittelglied mit eingeschlossen, das Minuszeichen erhält; also $(a-b)^n =$

$$a^n - \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n.n-1}{1.2} a a^{n-2} b^2 - \ldots\ldots$$

$$\pm \frac{n.n-1 \ldots (n-(n-2))}{1.2 \ldots n-1} a b^{n-1} \pm b^n.$$

Zus. 3. Jedes xte Mittelglied, das nte oder Schlußglied mitgerechnet, enthält das zunächst vorhergehende $\frac{n-(x-1)}{x} \cdot \frac{b}{a}$ mal; aus dem Anfangsgliede lassen sich daher alle folgenden berechnen. Oben war doch $(3+2)^4 = 81 + 216 + 216 + 96 + 16 = 625$; und $81 . \frac{n-x-1}{x} . \frac{b}{a}$ ist $= 81 . 4 . \frac{2}{3} = 216$; eben

so $216 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 216$, und $216 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 96$, endlich $96 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = 16$.

Zusatz 4. $(a + b)^n$ werde gleich gemacht $(1 + c)^n$; so ist $(a + b)^n = (1 + c)^n$

$$= 1 + \frac{n}{1} c + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} c^2 + \cdot \cdot \cdot +$$

$$\frac{n \cdot n - 1 \cdot \cdot \cdot n - (n - 2)}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot n - 1} c^{n-1} + c^n.$$

Zus. 5. Weil $(a + b)^n = \left(a \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right)\right)^n$, und dieses nach § 74. 7. $= a^n \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$; so ist, $c = \frac{b}{a}$ gesetzt, $(a + b)^n =$

$$\left(1 + \frac{n}{1} c + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} c^2 + \cdot \cdot \cdot + \frac{n \cdot n - 1 \cdot \cdot \cdot n - (n - 2)}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot n - 1} c^{n-1} + c^n\right) \cdot a^n.$$

Zus. 6. In $(a + \sqrt{b})^n$ oder $(a + c\sqrt{b})^n$, $\sqrt{b}$ in beyden als irrational angenommen,

wird

wird a^n rational, $a^{n-1}b$ irrational, $a^{n-2}b^2$ rational, u. s. w.; man vergleiche § 75. 1. 2. Eben so wird in $(a+\sqrt{-b})^n$, oder $(a+c\sqrt{-b})^n$, nach §. 74. 4, a^n möglich, $a^{n-1}b$ unmöglich, $a^{n-2}b^2$ möglich u. s. w.

77 Aufgabe. Die Wurzeln, zumal die Quadrat und Cubikwurzeln der ganzen Zahlen, Brüche und Buchstabengrößen zu finden.

Hier giebt es 2 Fälle: 1) Wenn die Größen vollkommene Potenzen sind; 2) Wenn sie unvollkommene Potenzen sind. In Zahlen giebt dies irrationale Wurzeln, deren rationalen Theil man durch Annäherung so genau findet, daß man den sehr kleinen irrationalen Theil ohne Verlust schwinden lassen kann. In Buchstabengrößen, die unvollkommene Potenzen sind, kann die Operation des Wurzelextrahirens nur angedeutet werden; aber darum kann diese Wurzel in ihrem Zahlenwerthe eben so gut rational, als irrational seyn. Die Qua-

dratwurzel von $a^2 + 3ab + 3a$ kann nur durch $\sqrt{(a^2 + 3ab + 3a)}$, oder $(a^2 + 3ab + 3a)^{\frac{1}{2}}$ angedeutet werden; ist aber $a = 3$, $b = 2$, so ist ihr Werth in Zahlen genau 6. — Höherer Potenzen Wurzeln findet man am bequemsten durch Logarithmen; wovon nachher.

Zusatz 1. Die Wurzel eines Produkts ist dem Produkte der Wurzeln eben des Grades aus den Faktoren jenes Produkts gleich. Eine Tafel der Wurzeln der Primzahlen ist daher vorzüglich vortheilhaft.

Zus. 2. $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ist $= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, und $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; wenn nun a und b nicht vollkommene Potenzen der verlangten Wurzel sind; so ist es besonders vortheilhaft, wenn doch b es ist, oder durch die Multiplikation mit b, und b^{n-1} dazu gemacht

macht wird. So entsteht $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{bb}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$, und $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a \cdot b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}} = (\sqrt[n]{(a\,b^{n-1})}) : b$; $\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, und $\sqrt[3]{\frac{7}{8}} = \sqrt[3]{\frac{7}{2}}$; eben so ist $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, und $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$.

Zusatz 3. $\sqrt[4]{x}$ ist $= \sqrt{(\sqrt{x})}$; $\sqrt[6]{x} = \sqrt[3]{(\sqrt{x})}$ oder $\sqrt{(\sqrt[3]{x})}$; überhaupt $\sqrt[mn]{x} = \sqrt[m]{(\sqrt[n]{x})}$ oder $\sqrt[n]{(\sqrt[m]{x})}$, und, wenn $m = a \cdot b$, $n = c \cdot d$, $\sqrt[mn]{x} = \sqrt[a]{\sqrt[b]{\sqrt[c]{\sqrt[d]{x}}}}$.

78. Aufgabe. Die 4 Rechnungsarten in Potenzengrößen zu verrichten.

Hier ersieht man bey der Division die Entstehung und Natur der Minuspotenzen.

79. Aufg. Potenzengrößen zu noch höheren Potenzen zu erheben, und Wurzeln aus ihnen zu ziehen.

Bey dem letztern erklärt sich die Natur der Bruchpotenzen, und ihre oben §. 73 bemerkte Uebereinstimmung mit Wurzelgrößen.

80. Aufgabe. Bruchpotenzen oder Wurzelgrößen aufzuheben, d. i. ihren Werth in Zahlen oder Buchstaben zu berechnen.

Zusatz. Es ist einerley bey dieser Berechnung, ob ich in $\sqrt[n]{x^m}$ erst die nte Wurzel von x suche, und diese zur mten Potenz erhebe, oder aus der mten Potenz von x die nte Wurzel ausziehe; $x^{\frac{m}{n}}$ ist $= \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

81. Lehrsatz. Jede Potenz kann durch eine Bruchpotenz, und diese durch eine Wurzelgröße ausgedrückt werden; eben so jede Wurzelgröße durch eine Bruchpotenz.

Für $x^{\frac{1}{1}}$ wird man indeß nicht $\sqrt[1]{x^1}$, wol aber, nach §. 82. $\sqrt{x^2}$, oder $\sqrt[3]{x^3}$, $\sqrt[n]{x^n}$ setzen.

82. Aufgabe. Wurzelgrößen, und also auch Bruchpotenzen, zu Potenzen zu erheben, wie auch Wurzeln aus ihnen zu ziehen.

83. Lehrsatz. Wenn man den Exponenten einer Bruchpotenz auf einen größern oder kleinern Namen bringt, und also auch wenn man bey Wurzelgrößen den Exponenten der Wurzel, und zugleich den Exponenten der Potenz oder der Größe unter dem Wurzelzeichen mit einerley Größe multiplicirt oder dividirt, wird weder der Werth der Bruchpotenz, noch der Wurzelgröße abgeändert.

84. Aufg. Bruchpotenzen und Wurzelgrößen gleichnamig zu machen für die 4 Rechnungsarten.

Wenn für die Addition und Subtraktion nicht ursprünglich Gleichnamigkeit da ist: so ist sie blos in Fällen, wie diese sind: $\sqrt{2}$ und $\sqrt{8} = \sqrt{2}$ und $2.\sqrt{2}$, und allgemein $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{b^n a} = \sqrt[n]{a}$ und $b\sqrt[n]{a}$ zu bewürken.

85. Aufgabe. Bruchpotenzen und Wurzelgrößen theils alleine, theils zugleich mit andern Potenzengrößen in den 4 Rechnungsarten geschickt zu behandeln.

Man übe sich an folgenden drey Exempeln: Von dem Produkte der beyden Faktoren $\frac{4pr}{x} - \sqrt{\frac{p^3}{x}}$, und $6p + \sqrt{\frac{pqq}{x}}$, $- 6p^2\sqrt{\frac{p}{x}}$ abgezogen, muß $\frac{24p^2r}{x} + \frac{4prq}{x}\sqrt{\frac{p}{x}} - \frac{p^2q}{x}$ übrig lassen; so muß, wenn man $a\sqrt[3]{x^4} - ff\sqrt[3]{x^2}$ von dem Produkte der beyden Faktoren $a\sqrt[3]{x} + bx - \frac{c}{\sqrt[3]{x}} - \frac{e}{\sqrt[3]{x^2}} + f - g\sqrt[3]{x^2}$, und $x - f\sqrt[3]{x^2}$ abziehet, $bx^2 - (g + bf)x^{\frac{5}{3}} + fgx^{\frac{4}{3}} + (f - af)x - cx^{\frac{2}{3}} + (cf - e)x^{\frac{1}{3}} + ef$ übrig bleiben.

End·

Endlich muß das Dividendum $af\sqrt[5]{x^3} - (ag + bf)\sqrt[5]{x} - \frac{cg}{\sqrt[5]{x^2}} + \frac{bg}{\sqrt[5]{x}} + cf$, dividirt durch $f - \frac{g}{\sqrt[5]{x^2}}$, zum Quotienten $ax^{\frac{3}{5}} - bx^{\frac{1}{5}} + c$ geben.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

86. Erklärung. Das Verhältniß zweyer Größen ist ihr Unterschied, ihre Verschiedenheit; das arithmetische entdeckt man durch Schätzung dieses Unterschiedes nach Subtraktion; das geometrische durch Schätzung dieser Verschiedenheit nach Division; eben deswegen setzt man in jenem das Zeichen der Subtraktion, in diesem das der Division zwischen die beyden Größen. Es drückt demnach $a - a + d$ jedes arithmetische, und $a : ma$ jedes geometrische Verhältniß aus; d und m heißen Namen der Verhältnisse; d noch besonders die Differenz des arithmetischen,

und

und m der Exponent des geometrischen Verhältnisses. Wenn d eine negative Größe, und m ein ächter Bruch ist: so ergiebt sich, daß a + d und ma kleiner seyn müssen als a; auch können d und m irrationale Größen seyn, wodurch irrationale Verhältnisse entstehen. Die Gleichheit zweyer solcher Verhältnisse heißt Proportion; arithmetisch bey zwey gleichen arithmetischen und geometrisch bey zwey gleichen geometrischen Verhältnissen. Diese Gleichheit hängt von dem gleichen Namen beyder Verhältnisse ab; wo gleiche Namen sind, sind gleiche Verhältnisse, und also Proportion; umgekehrt müssen, wo Proportion ist, gleiche Namen der Verhältnisse seyn. Man stellt durch $a - a + d = b - b + d$ jede arithmetische, und durch $a : ma = b : mb$ jede geometrische Proportion vor. Solche 4 Größen, als $a, a + d, b\ b + d$ sind sich arithmetisch, und solche, als a, ma, b, mb sind sich geometrisch proportionirt; jene heißen also arithmetische, diese geometrische Proportionalgrößen. In $a -$

$a + d = b - b + d$, und $a : ma = b : mb$ nennt man die jedesmaligen 4 Grössen die 4 Glieder der Proportion, von welchen das erste und vierte die äusseren oder Endglieder, das 2te und 3te die innern oder Mittelglieder heissen; so nennt man auch das erste und dritte die Vorderglieder oder die Anfangsglieder, und das zweyte und vierte die Hinter- oder die Folgeglieder. Auch heissen diese beyden Paare, das erste und dritte nemlich, und das zweyte und vierte Glied, homologe oder gleichnamige Glieder. Jedes Gliederpaar, nur nicht dasjenige, welches auch den beyden äussern, noch dasjenige, welches aus den beyden innern Gliedern besteht, fasst 2 harmonische Glieder in sich. Abgesondert oder getrennt heisst so wohl die arithmetische als die geometr. Proportion, wenn die Grössen der Mittelglieder verschieden, stetig aber oder zusammenhängend, wenn diese nicht verschieden sind. Wenn $a + d = b$, und $ma = b$: so stellt $a - a + d = b - b + d$ auch jede zusammenhängende arithmetische, und

a:

$a : ma = b : mb$ jede zusammenhängende geometr. Proportion vor; gewöhnlicher aber drückt man jene durch $a - a + d = (a + d) - (a + 2d)$ und diese durch $a : ma = ma : m^2a$ aus. Arithmetische und geometrische Progressionen oder Reihen sind Reihen solcher Größen, deren jede zu der vorhergehenden einerley arithmet. oder geometrisches Verhältniß hat, so daß man aus je 3 unmittelbar folgenden Gliedern eine stetige arithmet. oder geometr. Proportion machen könnte; a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, ... $a + xd$ stellte jede arithmetische, und a, ma, m^2a, m^3a, ... m^xa jede geometrische Progression vor; sie heißen steigend oder wachsend, wenn d positiv, und m mehr als Eins, fallend oder abnehmend, wenn d negativ und m ein ächter Bruch ist.

Wenn zwey Größen gleich sind, so findet freylich kein Unterschied unter ihnen statt; aber eben diese Gleichheit, dieser Nullunter-

terschied, wenn man so sagen dürfte, macht alsdenn ihr Verhältniß aus; kurz auch Verhältnisse und Proportionen, wie $12 - 12 = 24 - 24$, und $12 : 12 = 24 : 24$ finden statt; o ist der Name dieser arithmetischen, und 1 der dieser geometrischen Verhältnisse zweyer gleichen Größen.

87. Lehrsatz. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder, und in jeder geometrischen das Produkt der äußern, dort der Summe, hier dem Produkte der innern Glieder gleich.

Zusatz. 1. In der stetigen arithmetischen Proportion macht demnach die Summe der beyden äußern Glieder das Gedoppelte Eines Mittelgliedes aus, und in der stetigen geometrischen ist das Produkt der äußern Glieder das Quadrat Eines Mittelgliedes.

Zus. 2. Daher lassen sich aus $a + b = c + d$ 8 arithmetische, und aus $e . f = g . h$ 8 geo-

8 geometrische Proportionen ableiten, von welchen in beyden Fällen vier würklich im Namen der Proportion, vier aber nur in der Ordnung der Verhältnisse verschieden sind. Nemlich

aus $a + b = c + d$ entstehen:

1. $a - c = d - b$
2. $a - d = c - b$
3. $b - c = d - a$
4. $b - d = c - a$
5. $c - a = b - d$
6. $c - b = a - d$
7. $d - a = b - c$
8. $d - b = a - c$

arithmetische

und aus $e . f = g . h$ entstehen:

1. $e : g = h : f$
2. $e : h = g : f$
3. $f : g = h : e$
4. $f : h = g : e$
5. $g : e = f : h$
6. $g : f = e : h$
7. $h : e = f : g$
8. $h : f = e : g$

geometrische Proportionen.

Zusatz 3.

Zusatz. 3. Daher lassen sich aus e . f = g . h, oder aus e:g = h:f 8 Brüche angeben, welche paarweise gleich groß sind. Nemlich $\frac{g}{e} = \frac{f}{h}$, $\frac{h}{e} = \frac{f}{g}$, $\frac{g}{f} = \frac{e}{h}$, $\frac{h}{f} = \frac{e}{g}$. Man kann auch sagen, aus einem Paare gleicher Brüche $\frac{g}{e} = \frac{f}{h}$ lassen sich noch 3 Paare anderer gleicher Brüche angeben. Eben so erhellt, daß man aus $\frac{g}{e} = \frac{f}{h}$ 4, oder gar 8, geometr. Proportionen aufsetzen könne; und daß, wenn $\frac{g}{e} = \frac{f}{h}$, e . f = g . h seyn müsse.

Zus. 4. Die Einheit ist = 1; jedes Faktorenpaar heiße a und b; ihr Produkt ab; D jedes Dividendum; d jeder Divisor und q jeder Quotient: so sind folgende Proportionen richtig:

1 : a = b : ab, und 1 : d = q : D, folglich aus 1 : b = a : ab, und 1 : q = d : D u. s. w.

Verhältnisse und Proportionen ohne nähere Bestimmung versteht man von den geometrischen Verh. und Proport.

88. Grundsätze: 1. Wenn $a : b = c : d$, und $e : f = c : d$, so ist $a : b = e : f$. 2. Wenn $a = b$, so ist $a : c = b : c$, und $c : a = c : b$. Ist also $c : a = c : b$, so muß $a = b$ seyn. 3. Wenn $a = b$, und $c = d$: so ist nicht nur $a : b = c : d$, sondern auch $a : c = d : b$

89. Lehrsätze. Aus $a : ma = b : mb$ entsteht außer dem §. 87. Zus. 2. bemerkten noch 1. durch Addition und Subtraktion der Glieder in jedem Verhältnisse

$$a \pm ma : ma = b \pm mb : mb;$$

$$a : a \pm ma = b : b \pm mb.$$

2.

2. Durch Multiplikation und Division aller Glieder, oder harmonischer Gliederpaare mit und durch einerley Grösse

$$ax : max = bx : mbx;$$

$$ax : max = b : mb;$$

$$a ; ma = bx : mbx;$$

$$ax : ma = bx : mb;$$

$$a : max = b : mbx;$$

$$\frac{a}{r} : \frac{ma}{r} = \frac{b}{r} : \frac{mb}{r};$$

$$\frac{a}{r} : \frac{ma}{r} = b : mb;$$

$$a : ma = \frac{b}{r} : \frac{mb}{r};$$

$$\frac{a}{r} : ma = \frac{b}{r} : mb;$$

$$a : \frac{ma}{r} = b : \frac{mb}{r}.$$

3. Durch

3. Durch Erhebung zu einerley Potenz, oder Extrahirung einerley Wurzel: $a^n : (ma)^n = b^n : (mb)^n$ und

$$\sqrt[r]{a} : \sqrt[r]{ma} = \sqrt[r]{b} : \sqrt[r]{mb}.$$

Zusatz 1. Alle unter 2 und 3 hier aufgeführten Proportionen können nicht nur auch nach 1; sondern mit denen unter 1 zugleich auch nach 87. 2 und 88 noch weiter behandelt werden.

Zusatz 2. Man kann also, um den Verhältnißnamen großer Zahlen zu erforschen, sie vorher durch ihr größtes gemeinschaftliches Maaß verkleinern; da nemlich $ma : mb = ma : mb$, so ist auch $a : b = ma : mb$.

Zus. 3. Zwey Brüche von gleichen Nennern verhalten sich wie ihre Zähler; zwey von ungleichen Nennern also auch wie die Zähler, wenn sie auf gleichen Namen gebracht sind; $\frac{a}{b} : \frac{c}{b}$

=

$= \frac{a}{b} : \frac{c}{b}$ also $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = a : c$; eben so $\frac{d}{e} : \frac{f}{g} = \frac{d}{e} : \frac{f}{g}$, also $\frac{d}{e} : \frac{f}{g} = \frac{dg}{eg} : \frac{ef}{eg}$ folglich $\frac{d}{e} : \frac{f}{g} = dg : ef$. Auch folgt hieraus, daß bey 2 ungleichen Dividendis und 2 gleichen Divisoren die Quotienten sich wie die Dividenda verhalten; $\frac{a}{b} = Q$ und $\frac{c}{b} = q$, giebt $Q : q = a : c$.

Zusatz 4. Zwey Brüche mit gleichen Zählern, aber ungleichen Nennern verhalten sich umgekehrt, wie diese Nenner; $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = c : b$. Dies heißt auch: bey gleichen Dividendis verhalten sich die Quotienten ungleicher Divisoren umgekehrt, wie diese ungleichen Divisoren.

80. Aufgabe. Zu 3 Gliedern einer abgesonderten arithmetischen und geometrischen Proportion das unbekannte 4te, und in der zusammen-

hängenden zu zweyen das unbekannte 3te zu suchen.

Zusatz 1. In der geometr. Proportion ergiebt sich hier die so genannte Regula Detri, auch die einfache Kettenregel. Die Regula Detri kann direkta und inversa seyn. Unter andern Vortheilen merke man auch, daß sich $a : ma = b : mb$ oft bequem mit $a : a + e = b : b + f$ verwechseln läßt, wo $f = \frac{b \cdot e}{a}$ ist.

Zus. 2. Man wende diese Aufgabe auch auf die einfache Gesellschafts- und Vermischungsrechnung an.

91. Lehrsatz. Wenn man in einer arithmetischen Progression das erste Glied a nennt, die Differenz d, die Zahl der Glieder n; so ist das letzte Glied $u = a + (n - 1)d$, und s oder die Summe aller Glieder $= \frac{(a + u) \cdot n}{2}$.

Zusatz 1. Ist die Reihe fallend; so sind $(n-1)d$ hinzu zu addirende Minusgrößen, oder u ist $= a - (n-1)d$.

Zus. 2. Die Summe der ersten $n-1$ natürlichen Zahlen ist also $\frac{n.(n-1)}{2}$ s. §. 76. III.

Zus. 3. Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2; man vergleiche §. 74. 8.

92. Aufgabe. Wenn irgend 3 Dinge von a, d, n, u und s bekannt sind, die beyden übrigen zu finden.

Außer den schon §. 91 durch a, d und n bestimmten u und s, ergiebt sich: 1. aus a, n und u, daß $d = \frac{u-a}{n-1}$; 2. aus a, u und s, daß $n = \frac{2s}{a+u}$; 3. aus

 d,

d, n und u, daß $a = u - (n - 1)d$;

4. aus d, u und s, daß $n = \frac{u - a}{d} + 1$;

und endlich 5. aus n, u und s, daß $a = \frac{2s}{n} - u$; wozu man die jedesmalige unbekannte 5te Größe noch leichter findet.

93. Lehrsatz. Wenn das erste Glied einer geometrischen Reihe Eins ist, der Exponent m, die Gliederzahl n: so ist das letzte Glied $u = m^{n-1}$, und die Summe der Reihe $s = \frac{m^n - 1}{m - 1} = \frac{mu - 1}{m - 1}$; ist das erste Glied a, das übrige, wie angenommen: so ist das letzte Glied $u = am^{n-1}$, und die Summe dieser Reihe $S = \frac{m^n - 1}{m - 1} a = \frac{mu - a}{m - 1}$.

Zusatz. 1. Ist m eine positive ganze Zahl, so ergiebt sich aus $s = \frac{m^n - 1}{m - 1}$, daß von jeder ganzen positiven Potenz einer ganzen Zahl Eins abgezogen, einen durch die Wurzel — 1 theilbaren Rest übrig lasse.

Zus. 2. Ist m eine negative ganze Zahl, und n ungerade: so wird $s = \frac{m^n - 1}{m - 1} = \frac{+ m^n + 1}{+ m + 1}$, und es erhellt, daß zu jeder ungeraden positiven Potenz einer ganzen Zahl Eins addirt, eine durch die Wurzel + 1 theilbare Summe gebe.

Zus. 3. Ist m ein ächter positiver Bruch; beyde Reihen also abnehmend; so wird für $s = \frac{m^n - 1}{m - 1}$ bequemer $\frac{1 - m^n}{1 - m}$, und für $S = \frac{mu - a}{m - 1}$ bequemer $\frac{a - mu}{1 - m}$ gesetzt; die-

ses $\frac{1-m^n}{1-m}$ und $\frac{a-mu}{1-m}$ nähert sich immer mehr $\frac{1}{1-m}$ und $\frac{a}{1-m}$, je grösser n ist; so daß, wenn n sehr hoch ist, man ohne bedeutenden Verlust $s = \frac{1}{1-m}$ und $S = \frac{a}{1-m}$ setzen kann, und, wenn n unendlich ist, $s = \frac{1}{1-m}$ und $S = \frac{a}{1-m}$ setzen muß.

Zus. 4. So nennt man z. B. in der Reihe $\overset{1}{1}, \overset{2}{\frac{1}{2}}, \overset{3}{\frac{1}{4}}, \overset{4}{\frac{1}{8}}, \overset{5}{\frac{1}{16}}, \ldots$ bis ins Unendliche $\overset{n}{\frac{1}{2^{n-1}}}$, wo n, wenn man so sich ausdrücken darf, das unendlichste, d. i. das nie zu erreichende letzte Glied bedeutet, diese Bruchreihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ bis an das unend-

lichste

lichste nie zu erreichende letzte Glied n = $\frac{1}{2^{n-1}}$ eine unendliche Reihe Brüche, und die Summe der hier angenommenen unendlichen Reihe von Brüchen ist = 1, denn $s = \frac{1-m^n}{1-m}$ ist hier $= \frac{1-\frac{1}{2}^n}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1^{n-1}}{2} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$; nun ist 2^{n-1} größer als jede anzugebende Zahl, folglich $\frac{1}{2^{n-1}}$ kleiner als jeder anzugebende Bruch oder Theil der Einheit; also ist $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ für $2 - 0 = 2$ anzusehen, und $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ bis ins unendliche = 1; $S = \frac{a-mu}{1-m} = \frac{a}{1-m}$ [$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$ = 1 beweiset eben dasselbe.

Zusatz

Zusatz 5. Die unendliche Reihe $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ u. s. w., worin a = m, beydes nemlich $\frac{1}{x}$ hat zur Summe $\frac{1}{x-1}$, so hat $-\frac{1}{x}$, $+\frac{1}{x^2}$, $-\frac{1}{x^3}$ u. s. w., ins Unendliche $-\frac{1}{x+1}$

Zus. 6. Die unendliche Reihe $+\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{x^2}$, $+\frac{1}{x^3}$, $-\frac{1}{x^4}$, $+\frac{1}{x^5}$, worin a = $+\frac{1}{x}$, m aber $-\frac{1}{x}$, hat $\frac{1}{x+1}$ zur Summe. Mann nenne die ganze Reihe und ihre Summe R; also $R = +\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x^2}\right), +\frac{1}{x^3}, + \left(-\frac{1}{x^4}\right) + \frac{1}{x^5} + \left(-\frac{1}{x^6}\right) + \ldots$ ins

Un-

Unendliche; die negativen Glieder darinn, und ihre Summe heiße N; also $N = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6}$ u. s. w.; folglich $N = \frac{1}{x^2 - 1}$ negative von den positiven zu subtrahirende Größen; die positiven Größen in der Reihe, und ihre Summe heiße P; also $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^7} + \ldots$ ins Unendliche; so ist, wenn man P mit N vergleichet, $P = \frac{1}{x} \cdot (1 + N)$; also $R = P - N = \frac{1}{x} \cdot (1 + N) - N = \frac{1}{x} + \frac{1}{x \cdot (x^2 - 1)} - \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - x}{x \cdot (x^2 - 1)} = \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x + 1}$

Zusatz

Zusatz 7. $1:(1-x)$, welches man auch in $a:(a-b)=1:\left(1-\frac{b}{a}\right)$, verwandeln kann; $1:(x-1)$ und $1:(1+x)$ geben solche unendliche Reihen, und man lernt aus der Operation der Division, wie groß nach irgend einem Gliede der Reihe, bey dem man aufhört, das Supplement oder die Ergänzung für ihr unendliches Fortlaufen sey.

Zus. 8. Nennt man in a, am u. s. w. das 2te Glied b; so ist $m=\frac{b}{a}$, $u=\frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$, $S=\frac{b^n-a^n}{a^{n-2}.(b-a)}$ für die steigende, und $\frac{a^n-b^n}{a^{n-2}.(a-b)}$ für die fallende Progression.

Zus. 9. Ist $n=x+\frac{p}{r}$, so daß x eine ganze Zahl und $\frac{p}{r}$ ein ächter Bruch ist: so läßt sich die Formel $S=\frac{mu-a}{m-1}$ nicht anwenden.

Zusatz 10. Der Unterschied der Glieder einer geometrischen Reihe giebt eine um Ein Glied kürzere neue geometrische Reihe mit eben dem Exponenten; diese wieder; so jede bis die Unterschiede keine Reihe mehr bilden. Die ersten Glieder dieser neuen Reihen machen auch eine geometrische Reihe aus, deren Exponent um Eins kleiner ist. Nemlich

	a	ma	m^2a	m^3a	m^4a
I.		$ma - a$	$m^2a - ma$	$m^3a - m^2a$	$m^4a - m^3a$
II.			$m^2a - 2ma + a$	$m^3a - 2m^2a + ma$	$m^4a - 2m^3a + m^2a$
III.				$m^3a - 3m^2a + 3ma - a$	$m^4a - 3m^3a + 3m^2a - ma$
IV.					$m^4a - 4m^3a + 6m^2a - 4ma + a$

hier hat jede Querreihe den Exponenten m, und die schräglaufende Reihe der ersten Glieder m — 1.

94. Aufgabe. Wenn von a, m, n, u und S je 3 Dinge bekannt sind, die Formeln der beyden übrigen zu finden.

95. Erklärung. Ein zusammen gesetztes Verhältniß ist ein solches, dessen Name aus dem Produkte der Namen zweyer oder mehrerer einfacher Verhältnisse besteht. Diese zus. ges. Verhältnisse können von dreyerley Art seyn;

I. Wenn das zus. ges. Verhältniß aus den einfachen Verhältnissen solcher Größen entsteht, welche mit denen in dem zusammengesetzten zwar in Beziehung stehen, und eben deswegen dieses zus. ges. Verhältniß bewürken, aber doch von ganz anderer Art sind. So, z. B. verhalten sich 2 Würkungen, E und e, wie der Name ihrer beyden respectiven Ursachen, C und c, multiplicirt mit dem Namen ihrer respectiven

Zeiten, T und t, worin diese Ursachen würken; wenn

also $C : c = 3 : 2$, od. allg. $= a : b$

und $T : t = 12 : 4$ od. allg. $= c : d$

so ist $E : e = CT : ct = 36 : 8$ od. allg. $= ac : bd$

d. i. $E : e$ ist ein zus. ges. Verhältniß, dessen Name aus $\frac{c}{C} \cdot \frac{t}{T}$ erhellt. Auf eben die Weise verhalten sich 2 Gärten (G und g), wie der Verhältnißname ihrer Längen (L : l) mit dem ihrer Breiten (B : b) multiplicirt.

II. Wenn die die Zusammensetzung bewürkenden Größen der einfachen Verhältnisse von einerley Art sind, und jedes vorhergehenden Verhältnisses Folgeglied das Anfangsglied des nachfolgenden ist. So z. E. könnte man die Größe einer Stadt f im Verhältnisse gegen eine andere a richtig schätzen, wenn man wüßte, die Stadt b wäre 2 mal so groß als a, c 3 mal so groß als b, d 4 mal so groß als c, e wäre $\frac{3}{4}$ von d, endlich f $1\frac{1}{2}$ mal so groß als e. Die Zusammensetzung sähe so aus:

Weil

Weil	a : b = 1 : 2	od. allg.	m : n,
und	b : c = 1 : 3	—	o : p,
auch	c : d = 1 : 4	—	q : r,
ferner	d : e = 4 : 3	—	s : t
endlich	e : f = 2 : 3	—	v : w

so ist abcde : bcdef = 8 : 216 = moqsv : nprtw.
d. i. a : f = 1 : 27.

III. Wenn, indem das übrige wie in II ist, alle einfachen Verhältnisse einerley Exponenten haben; Gesetzt jemand gewinnt mit seinem Capital $12\frac{1}{2}$ Procent, und schlägt Zinsenertrag zum Capital: so ist das Verhältniß seines Vermögens nach 4 Jahren e zu seinem anfänglichen Vermögen a aus folgendem Schema zu ersehen:

$$
\begin{array}{l}
a : b = 8 : 9 \text{ od. allg. } m : n \\
b : c = 8 : 9 \quad - \quad m : n \\
c : d = 8 : 9 \quad - \quad m : n \\
d : e = 8 : 9 \quad - \quad m : n \\
\hline
\end{array}
$$

$$
a : c = \left\{ \begin{array}{l} 4096 : 6561 \\ \text{od. } 8^4 : 9^4 \\ \text{od. } 1 : 1\tfrac{1}{8}^4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} = m^4 : n^4 \\ = 1 : \left(\frac{n}{m}\right)^4 \end{array}
$$

Ein solches Verhältniß, als hier a : e ist, nennt man 4 mal so groß (*ratio quadruplicata*) als a:b, oder b:c, oder c:d, oder endlich d:e, von welchen letztern ein jedes ein 4 mal so kleines ist (*rat. subquadruplicata*) als a : e; eben so ist a : d ein 3 mal so großes (*triplicata*) als a : b oder b : c, oder c : d welche 3 mal kleiner (*subtriplicatae*) heißen; auch ist a : c eine *duplicata* oder ein 2 mal so großes Verhältniß als a : b, oder b : c die *subduplicata* oder das 2 mal kleinere Verhältniß; überhaupt erklårt sich nun von selbst, was eine ratio multiplicata und submultiplicata sagen wolle.

Auf I gründet sich die sogenannte zusammengesetzte Regula de Tri, die Kettenregel, (nemlich die eigentliche, oder zusammengesetzte vgl. §. 90. 1.) die Gesellschaftsrechnungen mit Rücksicht auf verschiedene Zeiten, und andere Rechnungen.

Zusatz 1. Daß in dieser Zusammensetzung eines Verhältnisses gleiche Größen in den Vorder- und Hintergliedern sich einander aufheben, versteht sich von selbst; ein Verhältniß, welches erst wie p : q zunimmt, und alsdenn wie q : p abnimmt, leidet keine Veränderung.

Zus. 2. Das Verhältniß zweyer Produkte ist aus den Verhältnissen aller Faktoren zusammengesetzt, wenn jedes Produkt zu jedem Paare Einen Faktor hergibt; abc : def = (a : d) + (b : f) + (c : e.)

Zus. 3. Das Verhältniß der Einheit zum Quadrate ist 2 mal so groß, das der Einheit

zum Cubus 3 mal, das der Einheit zur $n$ten Potenz n mal so groß, als das der Einheit zur Wurzel; das letztere ist also $\frac{1}{2}$ mal, $\frac{1}{3}$ mal, $\frac{1}{n}$ mal so groß als jene. Jene sind ratt. dupl. tripl., ntuplicata von diesem; dieses eine subdupl., subtripl., subntuplicata von jenem. Eben so ist in $a : ma = ma : m^2a$, $a : ma$, $a : m^2a = (a : ma) + (a : ma)$ also eine duplicata von $a : ma$, und in a, ma, m^2a, $m^3a \ldots\ldots m^xa \ldots m^{n-1}a$, $a : m^3a$ eine triplicata, $a : m^xa$ eine xtuplicata, $a : m^{n-1}a$ ein $n - 1$ mal so großes Verhältniß, als $a : m$ ist. Auch ist $a^2 : b^2$ eine duplicata, $a^3 : b^3$ eine tripl. und $a^n : b^n$ eine ntuplicata von $a : b$.

Zusatz 4. Das auch zus. gesetz. Verhältnisse, wenn sie aus gleichen einfachen zusammengesetzt sind, gleich seyn und eine Proportion ausmachen müssen, ist begreiflich; nemlich wenn

$$\begin{array}{ll} a:b=m:n & \text{und } d:e=m:n \\ \underline{b:c=o:p} & \underline{e:f=o:p} \\ a:c=mo:np & \text{und } d:f=mo:np \end{array}$$

so ist $a:c=d:f$.

Zusatz 5. Auch das arithmetische Verhältniß kann man sich als durch Zusammensetzung entstanden denken; $1-9$ kann als $=(1-5)+(5-9)$ angesehen werden. So ist auch in $a, a+d, a+2d, \ldots a+xd \ldots a+(n-1)d$, im arithmetischen Sinne, $a-a+2d$ ein 2 mal, $a-a+xd$ ein x mal, und $a-(a+(n-1)d)$ ein $n-1$ mal so großes Verhältniß, als $a-(a+d)$ ist.

96. Erklärung. Ein geometrisches und arithmetisches Verhältniß interpoliren heißt es als aus x einfachen zusammengesetztes nach §. 95. 3 und 5 ansehen, und die x einfachen Verhältnisse suchen, so daß durch Einschaltung die dort bemerkten Progressionen entstehen.

Zusatz. Weil geometr. und arithm. Reihen aus lauter auf einander folgenden gleichen Verhältnissen bestehen: so interpolirt man eine solche Progression, wenn man das im §. bemerkte Verfahren auf jedes Verhältniß in derselben anwendet.

97. Lehrsatz. Wenn a : b interpolirt werden soll: so ist jedes einfachen Verhältnisses Exponent $\sqrt[x]{\frac{b}{a}}$; es entstehen dadurch in einer Progression x — 1 zwischen a und b einzuschaltende Glieder. Demnach wenn z. B. a = 4, b = 500, x = 3: so ist $\sqrt[x]{\frac{b}{a}} = 5$ und x — b = 2; d. i. 4 : 500 = (4 : 20) + (4 : 20) + (4 : 20), und aus 4 : 500 entsteht durch Einschaltung zweyer Glieder die Reihe 4, 20, 100, 500. Ist ein arithmetisches Verhältniß a — (a + d) zu interpoliren, so ist $\frac{d}{x}$ der neue Verhältnißname. Wenn also a = 3, d = 20,

und

und $x = 5$ gesetzt wird: so ist $3 - 23 = (3 - 7) + (3 - 7) + (3 - 7) + (3 - 7) + (3 - 7)$, und aus $3 - 23$ entsteht durch Einschaltung von 4 Gliedern die arithmetische Reihe 3, 7, 11, 15, 19, 23.

Zusatz 1. Ist nur Ein Glied einzuschalten; $a : b$ also nur als eine ratio duplicata anzusehen: so ersieht man aus § 95. 3., daß dieses einzuschaltende Glied $= \sqrt{(a . b)}$ sey, weil b alsdenn $= m^2 a$ ist. Eben so gibt in $a - b$ alsdenn $\frac{a - b}{2}$ gleich das einzuschaltende Glied.

Zus. 2. Gesetzt a sey $= 1$: so wird aus der §. 95. 3. angeführten Reihe a, ma, m^2a m^3a u. s. w. 1, m, m^2, m^3 u. s. w. Alle Glieder sind nun Potenzen der Größe m; ferner gibt eben die Zahl, welche anzeigt, aus wie vielen einfachen Verhältnissen $1 : m$ das zus. ges. $1 : m^2$, oder $1 : m^3$, oder irgend ein anderes $1 : m^x$, zusammengesetzt geworden, auch genau

an, die wievielste Potenz eben diese Größe m^2, m^3, oder m^x, von m sey. Da nun in 1, m, m^2 u. s. w. die Potenzen der Größe m in der Ordnung der natürlichen Zahlen auf einander folgen: so entstehen 2 Reihen

I, e. g. 1, m, m^2, m^3 . . . m^x u. s. w.

II. e. ar. 0, 1, 2, 3 . . . x u. s. w.

von der Art, daß jedes Glied in der arithmetischen genau anzeigt, theils welche Potenz von m das über ihm stehende Glied in der geometrischen sey, (d. i. jenes Glied der arithmet. gibt uns den Exponenten an, wenn wir dieses in der geometr. als eine Potenz von m ansehen wollen) theils wie viele einfache Verhältnisse 1 : m erfordert werden, um das zus. ges. Verhältniß der Einheit zu diesem Gliede in der geometr. Reihe zu bewürken. Diese Reihen rückwärts fortgesetzt

w. s. u. $\frac{1}{m^x}$ . . . $\frac{1}{m^2}$, $\frac{1}{m}$, 1, m I.

w. s. u. x— . . . —2, —1, 0, 1 II.

be-

behalten, wenn gleich die Frage, in welchem zusammen ges. Verhältnisse jedes Glied in I. zur Einheit stehe, 1 : m als einfaches angenommen, eine etwas andere Wendung bekömmt, doch noch immer die Natur, daß jedes Glied in II. der Exponent des über ihm stehenden Gliedes in I ist, wenn man dieses, welches nun ein Bruch ist, als eine Minuspotenz von m ansieht.

98. Aufgabe. In den eben angeführten Reihen,

$$\text{I.} \ldots \frac{1}{m^x} \ldots \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{m}, 1, m, m^2 \ldots m^x \ldots$$

$$\text{II.} \ldots -x \ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots x \ldots$$

zwischen irgend einem Gliederpaare in I. eine solche Einschaltung zu verrichten, daß man eine gewisse gegebene zwischen diesem Gliederpaare befindliche Größe herausbringe; eben so in II. durch Einschaltung den zu dieser gegebenen Größe gehörigen Exponenten oder Anzeiger zu finden, welche Potenz dieselbe von m sey.

Von

Von den Logarithmen.

99. Erklärungen. Man nennt die Größen in II. Logarithmen der über ihr stehenden Größen in I. Ein Logarithmus (x) einer Größe ($A = m^x$) ist also ihr Exponent, wenn sie als eine Potenz von einer gewissen andern Größe (m), welche man als Wurzel oder erste Potenz annimmt, angesehen wird. Ein logarithmisches System entsteht, so bald man m einen bestimmten Werth gibt, und darnach die Logarithmen der Größen berechnet; m heißt die Grundzahl, Fundamentalgröße oder Basis des Systems. Tafeln von der Einrichtung, daß man diese Exponenten der Größen, als Potenzen einer gewissen Größe geschätzt, theils in ihnen vorfindet, theils sie nach ihnen berechnen kann, heißen logarith. Tafeln. Dasjenige System, worin $m = 10$ angenommen ist, heißt das Briggische oder das gemeine System; dessen Logarithmen, d. i. die Logarithmen der ganzen Zahlen und Brüche in demselben, die gemeinen Logarithmen.

Man

Man sieht, warum man für einen solchen Exponenten die Benennung Logarithmus, d. i. Anzahl oder Zähler der Verhältnisse gewählt hat.

Zusatz. 1. Da bey der Betrachtung zusammen gesetzter Verhältnisse keine negative Größen vorkommen, sondern nur positive, oder besser absolute, welche auf jene nähere Bestimmung des Positiven und Negativen nicht Rücksicht nehmen: so kann die Basis eines log. Systems nicht wohl negativ angenommen werden; und für negative Größen sind mit dieser ihrer nähern Bestimmung des Negativen keine Logarithmen möglich; wohl aber, wenn man sie als absolute Größen betrachtet.

Zus. 2. In jedem logarithm. System, worin m als eine ganze Zahl vestgesetzt wird, müssen dennoch alle übrige Größen zwischen 1 und m, m und m^2, m^2 und m^3 u. s. w. eine ganze Zahl nebst einen Bruche, welchen man an bequem-

quemsten als einen Decimalbruch ausdrückt, zum Logarithmus haben. Die ganze Zahl, woraus ein Logarithmus, selten allein, gewöhnlich nebst einem Decimalbruche, besteht, heißt seine Kennzifer oder Charakteristik; der hinzu kommende Decimalbruch seine Mantissa. In einem System, worin die Basis ein unächter Bruch ist, kann nach §. 75. kein Logarithmus ohne Mantisse vorkommen, die Basis selbst abgerechnet.

Zusatz 3. Jeder ächte Bruch hat eine Minusgröße zum Logarithmus.

Zus. 4. Log. abc ist = Log. a + Log. b + Log. c; Log. D : d, oder Log. eines Quotienten q, = Log. D − Log. d; Log. a^x = x. Log. a; Log $\sqrt[x]{a}$ = (Log. a) : x; Log. $\sqrt[x]{a^r}$ = (Log. a^r) : x = (r. (Log. a)) : x = $\frac{r. \text{Log. } a}{x}$.

Zus. 5. Weil im Briggischen System alle Größen von 2 bis 9 incl. o nebst einer Mantisse,

von

von 11 bis 99 incl. 1 nebst einer Mantisse, von 101 — 999 incl. 2 nebst einer Mant. von 1001 — 9999 incl. 3 nebst einer Mantisse zum Logarithmus haben: so konnte man in den gemeinen logar. Tafeln die leicht zu errathende Kennzifer weglassen, und blos die Mantissa hinsetzen, wie dies gewöhnlich auch von 1001 an geschieht.

100. Lehrsatz. Wie sich die beyden Logarithmen einer und eben derselben Größe in zwey verschiedenen Systemen zu einander verhalten: so verhalten sich alle übrige Logarithmenpaare gleicher Größen in diesen zwey Systemen zu einander.

101. Aufgabe. Ein logarithmisches System, namentlich das der gemeinen Briggischen Logarithmen zu berechnen.

Nur die Art, wie man die Logarithmen zusammen gesetzter Zahlen aus denen ihrer Faktoren, und die der einfachen Zahlen durch Interpolation erhält, kann hier erklärt

klärt werden. Zwar hat der sel. Karsten im 2ten Th. 1 Abth. §. 146. ff. es nach Voraus- schickung einiger Erläuterungen gewagt, ohne fernern Beystand der höhern Arithmetik die allgemeinen Formeln schon vorzutragen, wornach man die sogenannten natürlichen Logarithmen, und durch diese die Briggi- schen am leichtesten berechnet; ich getraue mich aber nicht ohne Differentialrechnung hier lichtvoll genug seyn zu können. Des Hrn. Prof. Bürja Theorien in seinem selbstlernenden Algebristen 1 Th. S. 16—164. Logarithmen zu finden, scheinen mir in Theil ganz artig und gegründet, in der An- wendung aber nicht wenig mühsam und gleichwohl nicht genau zutreffend zu seyn.

Zusatz 1. Man erhält den Logarithmen eines Bruchs, wenn man den Log. seines Nenners von dem seines Zählers subtrahirt.

Zusatz 2. Angenommen, daß a, , c u. s. w. auf den Werth von 0 bis 9 incl. eingeschränkt sind, daß ferner die darüber stehenden Zifern 0, 1, 2 rc. Ordnungszifern der Einer, Zehner u. s. w. sind: so ist

$$\text{Log.}\ \overset{4}{a} + \overset{3}{b} + \overset{2}{c} + \overset{1}{d} + \overset{0}{e} = 4, + \text{eine Mantisse}$$

$$\text{Log.}\ \overset{3}{a} + \overset{2}{b} + \overset{1}{c} + \overset{0}{d} + \overset{-1}{e} = 3 + \text{eben diese Mant.}$$

$$\text{Log.}\ \overset{2}{a} + \overset{1}{b} + \overset{0}{c} + \overset{-1}{d} + \overset{-2}{e} = 2 + \text{eben diese Mant.}$$

$$\text{Log.}\ \overset{1}{a} + \overset{0}{b} + \overset{-1}{c} + \overset{-2}{d} + \overset{-3}{e} = 1 + \text{eben diese Mant.}$$

$$\text{Log.}\ \overset{0}{a} + \overset{-1}{b} + \overset{-2}{c} + \overset{-3}{d} + \overset{-4}{e} = 0 + \text{eben diese Mant.}$$

$$\text{Log.}\ \overset{-1}{a} + \overset{-2}{b} + \overset{-3}{c} + \overset{-4}{d} + \overset{-5}{e} = 0 + \text{eb. diese M.} - 1$$

$$\text{Log.}\ \overset{-2}{a} + \overset{-3}{b} + \overset{-4}{c} + \overset{-5}{d} + \overset{-6}{e} = 0 + \text{eb. diese M.} - 2$$

u. s. w. Man sieht hieraus einmal, daß man den Logarithmus eines Decimalbruchs, wenn

anders die Zifern desselben als eine ganze Zahl (d. i. als Zifern von den Ordnungen 0, 1, 2 u. s. w.) betrachtet nur in den Tafeln vorkommen, mit noch besonderer Leichtigkeit findet; zweytens, daß diese negative Logarithmen eine zum Theil positive Gestalt gewinnen, welche man, weil 0 + eine Mant. − 1 = 1 + eb. dies. M. − 2 = 2 + eb. dies. M. − 3, nach jedesmaliger Bequemlichkeit abändern kann.

102. Aufgabe. Theils den Logarithmus höherer Zahlen, als in den Logar. Tafeln vorhanden sind, theils zu nicht darin enthaltenden Logarithmen die natürlichen Zahlen zu finden.

Das erstere erstreckt sich auch über solche Decimalbrüche und ganze Zahlen mit Brüchen, deren Logarithmen man nicht nach §. 101. 2. finden kann; das letztere auch über die Logarithmen, deren natürliche Zahlen solche eben angeführte Brüche, oder ganze Zahlen mit Brüchen sind.

103. Aufgabe. Mit Logarithmen praktisch zu rechnen.

I. Wenn

I. Wenn 7680 Weizenkörner ein ℔ wiegen, 50 ℔ einen hiesigen oder Braunschweigischen Himten geben, und dieser einen Rthl. in Gold kostet, wie groß war denn die Forderung des Erfinders des Schachspiels, welcher, man weiß nicht, von welchem morgenländischen Könige, dem er seine Erfindung bekannt machte, so viele Weizenkörner zur Belohnung verlangte, als die daraus entstehende Summe ausmachen würde, wenn man die 64 Felder des Schachbretts so belegen könnte, daß auf dem ersten Felde 1, auf dem 2ten 2, auf dem 3ten 4, dem 4ten 8 Körner u. s. w. lägen?

Man vergl. Lorenz Elemente S. 115. §. 124, oder Kästners Anfangsgr. I. 2. S. 65. §. 34. Die Berechnung ohne Logarithmen gibt 18,446744,073709,551615; die nach Logarithmen $\overset{18}{1}8,44674\overset{12}{0}$ Körner; jene machen $\overset{12}{4}8,03839\overset{6}{6},025285$ Rthlr. 6 Sgr. $11\frac{560}{800}$ pf., diese $48,03838\overset{12}{5},41666\overset{6}{6}$ Rthl. 16 Sgr. aus.

II. Wenn ein Capital c eine Zeit von a Jahren hindurch zusammen gesetzte Zinsen (Zinse auf Zinse) trägt zu u Procent, wie groß f ist es nun am Ende des aten Jahres? Oder wenn irgend 3 von diesen 4 so bestimmten Größen c, a, u und f bekannt sind, welche ist denn die 4te?

S. Lorenz a. a. O. auch Kästners Anfgr. I. 2. 146. ff. Für f ergibt sich die Formel $f = c.\left(\frac{100+u}{100}\right)^a$; wenn $c = 10000$, $u = 3$, $a = 20$: so ist $f = 18061\frac{1}{10}$ Rthlr.; bleibt alles übrige, aber u wird $= 5$ genommen: so ist $f = 26533$ Rthlr. Für c findet man die Formel $c = \frac{f}{\left(1+\frac{u}{100}\right)^a}$ $= f.\left(\frac{100}{100+u}\right)^a$; wenn $f = 20000$, $u = 4$, und $a = 16$: so muß $c = 10678\frac{1}{5}$ Rthl. seyn. Eben so wird $u = 100.\left(\sqrt[a]{\frac{f}{c}} - 1\right)$; wenn sich ein Capital in

18 Jahren verdoppeln soll: so muß es zu 3,926, d. i. freylich zu 4, Procent ausgethan werden. Endlich a ist =

$$\frac{\text{Log.}\ \frac{f}{c}}{\text{Log.}\left(1+\frac{u}{100}\right)}.$$

III. Man sollte a Jahre hindurch am Ende jedes Jahres q zahlen, und will gerne gleich am Anfange des ersten Jahres alles S zahlen, wie viel ist zu zahlen?

S. Kästner a. a. O. S. 150. Man setze hier der Bequemlichkeit halber u = dem Zinsenbruch, d. i. = dem, was in II. $\frac{u}{100}$ hieß: so findet man $S = \frac{q}{1+u} + \frac{q}{(1+u)^2} + \ldots + \frac{q}{(1+u)^{a-1}} + \frac{q}{(1+u)^a} = q.\left(\frac{1}{(1+u)^1} + \frac{1}{(1+u)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+u)^{a-1}}\right.$ +

$+ \frac{1}{(1+u)^a}\Big)$, welches nach §. 93. 3

$$= q. \left(\frac{\frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^{a+1}}}{1 - \frac{1}{1+u}} \right),$$

und wenn man in diesem Bruch beydes Zähler und Nenner mit $1+u$ multiplicirt: =

$$q. \left(\frac{1 - \frac{1}{(1+u)^a}}{u} \right); \text{ in } S =$$

$q. \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{(1+u)^a . u} \right)$ ist dieser Bruch vielleicht am bequemsten ausgedrückt.

Beyspiel: Wer 20 Jahre hindurch am Ende jedes Jahres 500 Rthlr. zu zahlen gehalten wäre, könnte, wenn man 4 Procent Zinsen annimmt, mit 6795$\frac{3}{4}$ Rthlr. sich am Anfange des ersten Jahres auf einmal seiner Verpflichtung entledigen. Von dieser Art ist folgende Frage bey Kästner a. a. O. S. 164: Für die Bibliothek des

Prin-

Prinzen Eugen bezog seine fürstliche Erbinn von 1737 bis 1764, also wenigstens 26 Jahre hindurch, jährlich eine Leibrente von 10000 Gulden; wie hoch schätzte man die Bibliothek? Herr Hofr. K. gibt nach des Herrn v. Florencourt Tabellen die Antwort, zu 5 Procent habe man sie auf 143752,193 zu 4 auf 159827,222, und zu 3 auf 176769,804 Gulden geschätzt.

IV. Wie groß (f) wird das Capital c in a Jahren nach zusammen gesetzten Zinsen, wenn am Ende eines jeden Jahres eine gewisse Summe d davon abgezogen wird?

Auflösung. Der Zinsenbruch heiße auch hier u, wie in III. am Ende des des ersten Jahres ist aus c geworden: $(1+u)c.-d$; also am Ende des 2ten: $(1+u)^2.c-(1+u)d-d$; des 3ten: $(1+u)^3c-(1+u)^2d-(1+u)d-d$ u. s. w. Man sieht, am Ende des aten Jahres ist c oder $f=(1+u)^a c-(1+u)^{a-1}d-(1+u)^{a-2}d-\ldots\ldots-(1+u)^2d-(1+u)d-d$. Das

Aggregat aller Minusgrößen ist nach §. 93: $\frac{(1+u)^a d - d}{u} = (1+u)^a . \frac{1}{u}d - \frac{1}{u}d$. Diese von der Plusgröße $(1+u)^a c$ subtrahirt geben: $f = (1+u)^a . \left(c - \frac{1}{u}d\right) + \frac{1}{u}d$. Beyspiel: $c = 20000$, $a = 12$, $u = \frac{1}{30}$, $d = 400$; f wird denn $= 23857$.

V. Außer daß sich aus 3 bekannten Dingen von c, a, d u und f in IV die Formeln für das jedesmalige unbekannte 4te finden lassen; kann man nachfragen, wie groß muß irgend eins der 3 übrigen seyn, wenn $f = 0$, oder gar $= -x$ werden soll?

Auflösung: Aus $f = (1+u)^a . \left(c - \frac{1}{u}d\right) + \frac{1}{u}d$ in IV ergibt sich, f wird $= 0$, wenn $(1+u)^a . \left(c - \frac{1}{u}d\right)$ so viele Minusgrößen enthält, als $+\frac{1}{u}d$ Plusgrößen ausmacht; d. i. $(1+u)^a . \left(\frac{1}{u}d - c\right) = \frac{1}{u}d$ gibt $f = 0$. Je nachdem nun a, oder d, oder

oder endlich c bewürken soll, daß $f = 0$ werde, erhält man entweder

$$a = \frac{\text{Log.} \left(\frac{1}{u}d : \left(\frac{1}{u}d - c\right)\right)}{\text{Log.} \; 1 + u},$$

oder

$$d = \frac{(1+u)^a c}{(1+u)^a . \frac{1}{u} - \frac{1}{u}},$$

oder endlich

$$c = \frac{1}{u}d - \frac{\frac{1}{u}d}{(1+u)^a}.$$

Für den Fall $f = -x$ gäbe es folgende Frage: Wie lange muß A leben, wenn B, welcher 20000 Rthlr. von ihm hat, die er zu $3\frac{1}{2}$ Procent nach zus. ges. Zinsen in seinen Nutzen verwendet, bey einer Leibrente von jährlich 2000 Rthlr., welche er an A zahlt, 1000 Rthlr. Verlust haben soll? Die Antwort ist: nicht volle 13 Jahr.

VI. Gebrauch der Logarithmen, Maaße, Gewichte, Geldsorten u. d. gl., deren Verhältnisse bekannt sind, genau eines durch das andere auszudrücken.

S. Kästner S. 107 a. a. O., wo das artige Exempel unter andern auch nach Logarithmen berechnet ist: Ein Hannöversches Dragonerpferd trägt 400 ℔ 16 Loth 2 Quentchen Hannöverschen Gewichts; ein Preußisches Curassierpferd $430\frac{1}{2}$ ℔ Breslauer Gewicht; 100 ℔ Hann. Gew. sind = 121 ℔ Bresl. Gew.; welches Pferd trägt am meisten, und wie viel trägt es mehr?

Von den Combinationen und Permutationen der Größen.

102. Erklärungen. Die Verbindung oder Combination der Größen ist ein Nebeneinanderordnen einer gewissen Anzahl derselben, um zu sehen, wie viele Paare oder Verbindungen zu zwey, Ternen, oder Verbindungen zu 3, Quaternen oder Verbindungen zu 4 u. s. w. aus ihnen entstehen. Man hat I. Combinationen im weitläuftigen Sinne, wo a jedes Ding auch mit

sich

sich selbst Paare, Ternen u. s. w. bilden kann, und wo b. auch jede verschiedene Ordnung einer und eben derselben Größen oder Dinge neue Verbindungen bildet. II. Combinationen im eingeschränkteren Sinne, wo a beybehalten wird, b. aber wegfällt. III. Combinationen im engsten Sinne, wo beydes a. und b. wegfällt, und also nur die Menge würklich verschiedener Amben, Ternen u. s. w. das ist der Verbindungen zu 2, zu 3 u. s. w. verlangt wird. Versetzung oder Permutation ist die Verbindung aller gegebener Größen nach jedesmal verschiedener Ordnung.

103. Lehrsätze. 1. n Größen oder Dinge geben n^x Combinationen zu oder nach x im weitläuftigen Sinne. 2. n Dinge geben

$$\frac{n \,.\, (n+1) \,.\, (n+2) \,.\,.\, (n+(x-1))}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,...\, x}$$

Combinationen zu x im eingeschränkteren Sinne. 3. n Dinge geben

$$\frac{n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \,.\,.\,.\, (n-(x-1))}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,...\, x}$$

Ver-

Verbindungen zu x im engsten Sinne. 4. n verschiedene Dinge geben $1 . 2 . 3 . 4 \ldots (n-1) . n$ Permutationen. 5. Sind aber diese n Dinge nicht alle von einander verschieden, sondern kömmt z. B. eins wiederholt, wir wollen setzen e mal wiederholt, darunter vor: so geben diese n Dinge nur $\frac{1 . 2 \ldots\ldots (n-1) . n}{1 . 2 \ldots (e-1) . e}$

$= (e+1) . (e+2) \ldots\ldots (n-1) . n$ Versetzungen. Kommen gar 2 Dinge wiederholt, eins e mal, das andere f mal, darunter vor, und $f > e$: so können diese n Dinge nur

$$\frac{1 . 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (n-1) . n}{1 . 2 \ldots\ldots (e-1) . e . 1 . 2 \ldots (f-1) . f} =$$

$$\frac{(e+1) . (e+2) \ldots\ldots (n-1) . n}{1 . 2 \ldots\ldots (f-1) . f}$$

Permutationen geben. Eben so mit mehreren öfter darunter vorkommenden Dingen.

104. Aufgaben. I. 1. Mit 2 oder 3 und mehrern Würfeln wie viele, in Ansehung der sich oben zeigenden Seitenflächen der Würfel ver-

schiedene Würfe, sind da möglich? Antw. Mit zweyen 36, mit dreyen 216. 2. Wie viele in Ansehung der getroffenen Points oder Augen verschiedene? Antw. Mit zweyen 11, mit dreyen 17. 3. In welchem Verhältnisse stehen die Würfe vom niedrigsten bis zum höchsten zu allen möglichen, oder welche Wahrscheinlichkeit ist für einen jeden Wurf? Antw. Mit 2 Würfeln gibts für die 11 verschiedenen Würfe vom niedrigsten bis zum höchsten folgende Verhältnißzahlen; 1 : 36; 1 : 18; 1 : 12; 1 : 9; 5 : 36; 1 : 6; 5 : 36; 1 : 9; 1 : 12; 1 : 18; 1 : 36.

II. 1. Wie viele Amben, Ternen und Quaternen enthält eine Genuesische Lotterie? Antw. 4005 Amb., 117480 Ter. und 2555190 Quaternen. 2. Wie viele derselben kommen bey jeder Ziehung heraus? Ant. 10 Amb., 10 Ternen, und 5 Quaternen. 3. Welche Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, bey einem Billet von 4 Zahlen etwas beträchtliches in ihr zu gewinnen? Antw. Eine Ambe zu gewinnen, ist im 66¾ d. i.

im

im 67sten, eine Terne im 2937sten, eine Quaterne im 511038sten Falle wahrscheinlich, also höchst unwahrscheinlich.

III Wie viele verschiedene Spiele sind im L'ombre möglich? Antw. 273438880. Wie viele mit beyden As? Antw. 12620256 *).

105. Lehrsatz. Eine zweytheilichte Wurzel a + b, oder eine mehrtheilichte a + b + c ... wird dadurch zur ganzen positiven n Potenz erhoben, wenn man von den Theilen der Wurzel alle Combinationen zu n im eingeschränktern Sinne (102. II.) sucht, und einer jeden dieser Combinationen denjenigen Coefficienten mit dem Pluszeichen vorsetzt, welchen die Anzahl der Permutationen (103. 4 und 5.) eben dieser combinirten Größen angibt.

Man vergleiche §. 76.

Zusatz

---

*) S. Kästners Anfgr. III. I. §. 741. ff, wo aber im 742. §. in 13148076 sich ein Rechnungsfehler befinden muß, weil die daselbst richtig angegebenen Faktoren nicht dieses, sondern das von mir gesetzte Produkt 12620256 bewürken.

Zusatz $(a - b)^n$, $(a - b - c)^n$ erhalten begreiflich in demjenigen Gliede ein Minuszeichen, in welchem sich eine ungrade Anzahl von Minusefficienten, d. i. Minusfaktoren unter den Buchstaben befindet.

106. Lehrsatz. n solche Factoren, als $(x + a) . (x + b) . (x + c) . (x + d) \ldots$ geben das Produkt: $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \ldots\ldots + P$, von der Art, daß $A =$ der Summe von a, b, c, d, e u. s. f.; $B =$ der Summe der Combinationen aus a, b, c, d, e . . . zu zweyen im engsten Sinne; $C =$ der Summe eben dieser Combinationen aus diesen Größen zu dreyen; $D =$ der Summe der Combin. zu 4 u. s. w.; P endlich = dem Produkte $a b c d e \ldots$

Summe der Combinationen will hier nicht so viel sagen als Anzahl der möglichen Verbindungen, sondern als die Summe der Produkte, welche Produkte, die Combinationen zu zweyen, oder dreyen, oder vier

vier u. s. f. in jedem Falle bewürken, z. B.
$(6+2) \cdot (6+3) \cdot (6+4) \cdot (6+8)$
ist =

$$6^4 + \left\{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \end{matrix}\right\} 6^3 + \left\{\begin{matrix} 2.3 \\ 2.4 \\ 2.8 \\ 3.4 \\ 3.8 \\ 4.8 \end{matrix}\right\} 6^2 + \left\{\begin{matrix} 2.3.4 \\ 2.3.8 \\ 2.4.8 \\ 3.4.8 \end{matrix}\right\} 6 +$$

$$2.3.4.8 = 1296 + 3672 + 3528 + 1392 + 192 = 10080.$$

Ende der ersten Abtheilung.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Struve, Jacob, 1755-1841

Leitfaden für den Unterricht in der reinen Mathematik auf Schulen und Gymnasien

Bd.: 1. (1789). - 160 S.

Hannover 1789

Math.p. 554-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082918-0
VD18 80074375-001